

19 mai – 23 mai

## Représentation matricielle des applications linéaires

---

### Applications linéaires

Applications linéaires entre deux espaces vectoriels, notion d'endomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Propriétés des applications linéaires. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition.

Noyau, image d'une application linéaire. Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\text{Ker } \varphi$  est un sev de  $E$ , et  $\text{Im } \varphi$  est un sev de  $F$ .

Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité en termes de noyau et image.

Isomorphismes, automorphismes. Linéarité de la bijection réciproque.

Composition d'automorphismes.

Puissances d'endomorphismes.

Rang d'une application linéaire. Détermination du rang à partir d'une base de l'espace de départ.

Théorème du rang. Lien entre le rang et l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application linéaire.

Si  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\dim E = \dim F$ , alors  $\varphi$  injective  $\Leftrightarrow \varphi$  surjective  $\Leftrightarrow \varphi$  bijective.

Projecteurs associés à deux sev supplémentaires.

Si  $p$  projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $\text{Im } p = F$  et  $\text{ker } p = G$ .  $\text{ker } p \oplus \text{Im } p = E$ .

Si  $p$  et  $q$  sont les projecteurs associés à la décomposition  $E = F \oplus G$ , alors  $p+q = \text{Id}_E$  et  $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

$p$  est un projecteur ssi  $p \circ p = p$ .

### Représentation matricielle des applications linéaires

Matrice d'un vecteur dans une base, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimension finie.

Isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur.

Noyau et image d'une matrice.

Matrice d'une composition d'applications linéaires.

Matrice d'une puissance d'endomorphisme.

Bijectivité et matrice de la bijection réciproque. Cas d'un endomorphisme.

Rang d'une matrice. Le rang d'une matrice est celui de sa transposée.

Calcul du rang par algorithme du pivot de Gauss.

Application au calcul du rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire.

Polynômes d'endomorphisme, polynômes matriciels. Polynômes annulateurs. Application au calcul de la bijection réciproque d'un endomorphisme, de l'inverse d'une matrice.