Chapitre 1

Rudiments de logique

Ce chapitre présente les points de vocabulaire, des notations ainsi que certains types de raisonnements et de démonstrations (implication, équivalence, ...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

I Eléments de logique

1. Proposition mathématique

Définition - Proposition

On appelle *proposition* tout énoncé mathématique dont on peut dire s'il est vrai ou faux.

On distingue deux types de propositions :

- les *assertions* : propositions dont la valeur de vérité ne dépend de la valeur d'aucun argument,
- les *prédicats* : propositions dont la valeur de vérité dépend de la valeur d'au moins un argument.

Remarque. Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse : c'est le principe de non contradiction.

Exemples.

- "Il pleut", "$1+1=2$", "$1+1=0$", "π est un nombre rationnel" sont des propositions, ce sont en particulier des assertions.
- "Bonjour", "$(2x+1)e^x$", ne sont pas des propositions.
- La proposition "$\ln x > 0$" est un prédicat : sa valeur de vérité dépend de la valeur de x. Elle est vraie si $x > 1$, et fausse sinon.

Exercice 1.

"La suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante" est-elle une proposition ? Si oui, est-ce une assertion ou un prédicat ?

Définition - Équivalence de propositions

On dit que deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est vraie dès que $\mathcal{Q}$ est vraie, et fausse dès que $\mathcal{Q}$ est fausse.

Exemple. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la proposition $\ln x > 0$ est équivalente à la proposition $x > 1$.

2. Connecteurs logiques

a. Négation

Définition - Négation

Soit $\mathcal{P}$ une proposition. La *négation* de $\mathcal{P}$, notée "non $\mathcal{P}$" ou "$\neg\mathcal{P}$" est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Remarques.

- Table de vérité de "non $\mathcal{P}$" :

$\mathcal{P}$	"non $\mathcal{P}$"
V	F
F	V

- La proposition "non (non $\mathcal{P}$)" est équivalente à $\mathcal{P}$.

Exemples.

- Si x est un réel, la proposition "non $(x=0)$" est équivalente à "$x \neq 0$". Elle est encore équivalente à "$x \in \mathbb{R}^\star$", "$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$", ou "$x > 0$ ou $x < 0$".

– Si x est un réel, la proposition "non $(x \geqslant 3)$" est équivalente à "$x < 3$".
– Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, la proposition "non (f est croissante)" n'est pas équivalente à "f est décroissante". Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas croissante, mais pas décroissante non plus.
– Pour un dé lancé trois fois, la négation de "les trois numéros obtenus sont pairs" est "au moins un des numéros obtenus est impair".

b. Conjonction (ET) et disjonction (OU)

Définition - Conjonction, disjonction

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

– *Conjonction.* La proposition "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$", notée aussi "$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$", est la proposition qui est vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies toutes les deux.
– *Disjonction.* La proposition "$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$", notée aussi "$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$", est la proposition qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie.

Remarques. – Table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

– Le *ou* est *inclusif* : "$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$" est vraie lorsque soit P est vraie, soit Q est vraie, soit les deux le sont.

Exemples.

◇ "$(x \geqslant 0)$ et $(x < 5)$" est équivalente à "$x \in [0, 5[$".
◇ "$(x > 0)$ ou $(x < 0)$" est équivalente à "$x \neq 0$".
◇ Pour un dé lancé, soit $\mathcal{P}$: "le numéro sorti est pair" et $\mathcal{Q}$: "le numéro sorti est supérieur ou égal à 3". Alors
  – la proposition $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est équivalente à : "le numéro sorti est 4 ou 6."
  – la proposition $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est équivalente à : "le numéro sorti est $2, 3, 4, 5$ ou 6."

Exercice 2. Écrire sans faire intervenir les connecteurs et ou ou les propositions suivantes :

a. "$(x \geqslant 3)$ et $(x \leqslant 3)$".
b. "$(x > 0)$ ou $(x \in [-1, 2[)$".

Exercice 3. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. "La fonction ln est croissante" ou "la fonction exp est décroissante".
b. "La fonction ln est croissante" et "la fonction exp est décroissante".
c. "$(x < -1)$ et $(x \geqslant 3)$", où $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. La proposition "non $((x < -1)$ et $(x \geqslant 3))$" est équivalente à "$(x \geqslant -1)$ ou $(x < 3)$". Cette deuxième proposition est d'ailleurs vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition - Lois de Morgan

◇ La proposition "non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)" est équivalente à "(non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$)".
◇ La proposition "non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$)" est équivalente à "(non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$)".

Démonstration. On vérifie à l'aide d'une table de vérité que les propositions "non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)" et "(non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$)" ont les mêmes valeurs de vérité. De même pour les propositions "non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$)" et "(non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$)". □

Exemple. Si on considère le lancer de deux dés et qu'on appelle $\mathcal{P}$ la proposition "le premier dé est pair", et $\mathcal{Q}$ la proposition "le deuxième dé est pair", alors :

– La proposition "non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$)" est équivalente à "(non $\mathcal{P}$) ou (non $\mathcal{Q}$)", qui équivaut à "au moins un des dés n'est pas pair."
– La proposition "non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)" est équivalente à "(non $\mathcal{P}$) et (non $\mathcal{Q}$)", qui équivaut à "aucun des dés n'est pair."

Proposition - Distributivité

◇ La proposition "$\mathcal{P}$ et ($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$)" est équivalente à "($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) ou ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$)".
◇ La proposition "$\mathcal{P}$ ou ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$)" est équivalente à "($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}$)".

c. Implication

Définition - Implication

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, on écrit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ la proposition qui est fausse si et seulement si $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse.

La proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ se lit "$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$" ou bien "si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$".

Remarques. – Table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

– *Négation de* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: par définition de l'implication, la proposition non $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à ($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$).
– ⚠ Cela peut surprendre mais, lorsque $\mathcal{P}$ est faux, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est toujours vraie. Il faut retenir qu'une proposition fausse implique n'importe quelle autre.

Exemple. La proposition "si un éléphant est rose, alors il a cinq pattes" est vraie.

– En français, une implication se traduit par les mots : *donc*, *alors*, *par conséquent*, *ainsi*, *d'où*, ...

Montrer "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$". Pour montrer que la proposition "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" est vraie, on rédigera de la manière suivante.

Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie.
(...) alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
On a donc bien montré que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie.

Exercice 4. Soient x et y deux réels. Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. $x = y \;\Rightarrow\; x^2 = y^2$ *b.* $x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; x = y$ *c.* $|x| = |y| \;\Rightarrow\; x = y$

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie :

⋆ $\mathcal{Q}$ est vraie dès que $\mathcal{P}$ est vraie donc *il suffit que* $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ le soit aussi : on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition suffisante* pour avoir $\mathcal{Q}$.

⋆ si $\mathcal{Q}$ est fausse, $\mathcal{P}$ ne peut pas être vraie donc *il faut que* $\mathcal{Q}$ soit vraie pour que $\mathcal{P}$ le soit : on dit que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* pour avoir $\mathcal{P}$.

Exercice 5. Écrire les phrases suivantes sous forme d'implication, puis écrire leurs négations.

a. Je prends mon parapluie dès qu'il pleut.
b. Les champignons ne poussent qu'en automne.
c. Pour tout $n \geqslant 10$, u_n est strictement positif.
d. Pour que $f(x) > 1$, il suffit que $x > 2$.
e. Pour que $f(x) > 1$, il faut que $x < 2$.

Proposition–Définition - Contraposée

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions. On appelle *contraposée* de l'implication "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" la proposition "$(\text{non}\,\mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathcal{P})$".

Les propositions "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" et "$(\text{non}\,\mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathcal{P})$" sont équivalentes.

Exemple. La contraposée de la proposition "s'il pleut, il y a des nuages" est "s'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas".

Méthode - Montrer une implication

Pour démontrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on peut donc :

- suposer que $\mathcal{P}$ est vraie, et montrer qu'alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi.
- *raisonner par contraposée*, c'est-à-dire supposer que non $\mathcal{Q}$ est vraie et montrer qu'alors non $\mathcal{P}$ l'est aussi.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Nous allons raisonner par contraposée : nous allons montrer l'implication "n n'est pas pair $\Rightarrow n^2$ n'est pas pair", c'est-à-dire "n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair".

Supposons que n est impair. On sait alors que n s'écrit $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$n^2 \;=\; (2k+1)^2 \;=\; 4k^2+4k+1 \;=\; 2(2k^2+2k)+1.$$

Ceci entraîne que n^2 est impair, et conclut la preuve.

Définition - Réciproque

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux propositions, on appelle *réciproque* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Remarque. Évidemment, lorsqu'une implication est vraie, la réciproque ne l'est pas toujours. Par exemple, la réciproque de l'implication "s'il pleut, il y a des nuages" est "s'il y a des nuages, alors il pleut".

Exemples.

1. La réciproque de n pair $\Rightarrow n^2$ pair est n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
2. La réciproque de la proposition $(x = x^2) \Rightarrow (x \geqslant 0)$ est-elle vraie ?

d. Equivalence

Définition - Équivalence

On note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ la proposition qui est vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes.

La proposition $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ se lit "$\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$" ou "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes" ou encore "$\mathcal{P}$ *si et seulement si* (ssi) $\mathcal{Q}$".

Remarques.

- La proposition "$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$" est équivalente à "$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$".
- Si "$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$" est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est une *condition nécessaire et suffisante* (CNS) pour avoir $\mathcal{Q}$.

Exemples.

- ⋄ "$x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$" est fausse.
- ⋄ "$x = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$" est vraie.
- ⋄ "$x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$" est vraie.
- ⋄ Si $n \in \mathbb{N}$, la proposition "n est multiple de 6 $\Leftrightarrow n$ est multiple de 2 et de 3" est vraie.

Méthode - Montrer une équivalence

Pour démontrer que "$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$" est vraie, on peut :

- procéder par double implication, c'est-à-dire montrer que "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" est vraie puis que "$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$" est vraie,
- procéder directement par équivalence, si la situation le permet.

Exemples.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que "n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair".
   - Montrons l'implication "n pair $\Rightarrow n^2$ pair".

     Supposons que n est pair. On sait alors qu'on peut écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc n^2 est pair.
   - On a montré plus haut que l'implication "n^2 pair $\Rightarrow n$ pair" est vraie.

   On a alors montré l'équivalence "n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair" par double implication.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\dfrac{2x}{x^2+1} = 1$. On raisonne par équivalence : on a

$$\frac{2x}{x^2+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

⚠ L'utilisation des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ est PROSCRITE à l'intérieur de la rédaction. Ces symboles ne pourront être utilisés *que* dans des propositions mathématiques.

3. Quantificateurs

a. Propositions quantifiées

Définition - Quantificateurs

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat. On introduit les propositions suivantes.

- La proposition "$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$)" est vraie si pour tout élément x de E, la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.
- La proposition "$\exists x \in E, \ \mathcal{P}(x)$)" est vraie s'il est possible de trouver au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.

Exemples.

- La proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^x \geqslant 0$" et vraie.
- La proposition "$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$" est vraie.
- La proposition "$\exists x \in \mathbb{R}, \ x^2+1 < 0$" est fausse.
- La proposition "$\exists x \in]0,+\infty[, \ x^2-4x+3 = 0$" est vraie : il suffit de remarquer que pour $x = 1$, on a $x^2-4x+3 = 0$.
- La proposition "$\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ x > y$" est équivalente à "il existe un réel strictement plus grand que tous les autres", elle est bien sur fausse.

⚠ Les quantificateurs sont des symboles mathématiques, pas des abréviations ! On ne les écrit pas au milieu d'une phrase en français. On écrira dans ce cas "pour tout" ou "il existe" en toutes lettres.

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions :
   - "n est pair".
   - "n est impair".
2. Soit f une fonction réelle. Écrire avec des quantificateur la proposition "f est croissante".

Remarque. Les propositions "$\forall x \in E, \ \mathcal{P}(x)$" et "$\exists x \in E, \ \mathcal{P}(x)$" sont des assertions : elles ne dépendent pas de x.

Méthode - Montrer $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$

Lorsqu'on doit montrer une proposition du type "$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$", on commence par se donner un élément $x \in E$, puis montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On aura alors bien montré que $\mathcal{P}(x)$ est vraie *pour tous les* $x \in E$.

Dans la pratique, on écrit :

Soit $x \in E$.
$(\dots)$ donc $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
Donc $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Exercice 7. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0, \quad \text{donc} \quad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Méthode - Montrer $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$

Lorsqu'on veut montrer une proposition du type "$\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$", on peut

- soit utiliser une preuve *constructive*, c'est-à-dire trouver un exemple explicite d'élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie, dans ce cas on écrira :

  Posons $x_0 = \dots \in E$.
  $(\dots)$ donc $\mathcal{P}(x_0)$ est vraie.
  On a donc bien montré qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

- soit utiliser un théorème dit *d'existence*, qui prouvera l'existence de x, sans en donner un exemple explicite.

Exemple. Montrons : "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 2 < 0$".

Posons $x_0 = 1$, on a alors $x_0^2 - x_0 - 2 = -2 < 0$, donc on a bien montré la proposition.

Exercice 8.

1. Montrer : $\exists x \in [0,3],\ x^2 - 3x + 2 < 0$.
2. Montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$.
3. Montrer : $\exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x + x = 0$.

Proposition - Négation des proposition quantifiées

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat.

- La proposition "non $\big(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)\big)$" est équivalente à "$\exists x \in E,\ \text{non}\, \mathcal{P}(x)$".
- La proposition "non $\big(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)\big)$" est équivalente à "$\forall x \in E,\ \text{non}\, \mathcal{P}(x)\big)$".

Exemples.

- Négation de "tous les humains ont les yeux bleus" : "il existe au moins un humain qui n'a pas les yeux bleus".
- Négation de "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$" : "$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$".

À retenir. Pour nier une proposition avec des quantificateurs, on pourra procéder de la manière suivante.

1. On remplace les quantificateurs $\forall$ par $\exists$, et les quantificateurs $\exists$ par $\forall$,
2. On nie le prédicat final.

Par exemple :

$$\text{Négation de } \text{“}\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)\text{”} \quad : \quad \text{“}\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x,y)\text{”}.$$

Exemple. La négation de la proposition “$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y$” peut s'écrire

$$\text{“}\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x \leqslant y\text{”}.$$

On peut la reformuler : “pour tout réel, on peut en trouver un plus grand”.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation de la proposition “$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$”.

Remarque. Pour montrer que la proposition “$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$” est fausse, il s'agit de montrer “$\exists x \in E,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x)$”. Il suffit donc de trouver un élément x_0 de E tel qu'on a $\text{non}\,\mathcal{P}(x_0)$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(x_0)$ est fausse. On retiendra qu'il suffit donc de trouver un contre-exemple.

Exemple. La proposition “$\forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 - 2x \geqslant 0$)” est fausse : on remarque que si $x = 1$, alors $x^2 - 2x = -1 < 0$. On vient donc de montrer “$\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 - 2x < 0$)”, qui est la négation de la proposition étudiée.

b. Permutation des quantificateurs

Dans une proposition faisant intervenir plusieurs quantificateurs, il faut faire très attention à l'ordre des quantificateurs. À titre d'exemple :

- La proposition “$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$” est vraie : pour tout réel x, on peut trouver un réel y tel que $x < y$, il suffit par exemple de choisir $y = x + 1$.
- Mais la proposition “$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$” est fausse : on ne peut pas trouver de réel y qui soit supérieur à tous les réels.

On méditera aussi sur l'exemple suivant : la proposition “dans toutes les cerises, il y a un noyau”, est bien différente de la proposition “il y a un noyau qui est dans toutes les cerises” !

Proposition - Permutation de quantificateurs

- On peut permuter deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels sans changer la valeur de vérité de la proposition :

$$\big(\forall x,\ \forall y,\ \mathcal{P}(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y)\big), \quad \text{et} \quad \big(\exists x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists y,\ \exists x,\ \mathcal{P}(x,y)\big).$$

- On ne peut pas permuter deux quantificateurs différents : en général la proposition $\big(\forall x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y)\big)$ n'est pas équivalente à $\big(\exists y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y)\big)$.

Remarque. On peut donc regrouper les quantificateurs $\forall$ consécutifs ou les quantificateurs $\exists$ consécutifs. Par exemple, la proposition $(\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$ se récrit $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$.

c. Existence et unicité

Notation. Si $\mathcal{P}(x)$ est un prédicat, on note “$\exists!\, x \in E,\ \mathcal{P}(x)$” la proposition qui est vraie si et seulement s'il existe *un unique* élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple. La proposition “$\exists!\, n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant 2n \leqslant 5$” est vraie : il existe un unique entier n vérifiant $3 \leqslant 2n \leqslant 5$, il s'agit de $n = 2$.

Pour montrer qu'une proposition du type “$\exists!\, x \in E,\ \mathcal{P}(x)$” est vraie, il faut donc montrer :

- que “$\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$” est vraie : il suffit de trouver un exemple d'élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai, on dit qu'il y a existence,
- qu'un tel élément $x \in E$ est unique, on dit qu'il y a unicité.

Méthode - Montrer l'unicité

Pour démontrer l'*unicité*, on peut supposer que deux éléments vérifient la propriété recherchée puis montrer que ces éléments sont égaux.

Dans la pratique, on écrit : *Soient x et y des éléments de E tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ sont vraies.*
Montrons que $x = y$: $(\dots)$.

⚠ Lorsqu'on a écrit cette preuve, on n'a pas démontré l'existence ! On a seulement montré qu'il y a *au plus* un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée.

Remarque. Certaines démonstrations d'existence et unicité se font au moyen d'un raisonnement par analyse-synthèse, que nous détaillerons dans la partie suivante.

II Différents types de raisonnements

Nous avons déjà rencontré :

- le raisonnement par contraposée, pour montrer une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$,
- le raisonnement par double implication, pour montrer une équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Nous allons rencontrer d'autres types de raisonnement pour des circonstances spécifiques.

1. Raisonnement par l'absurde

Le principe du raisonnement par l'absurde pour démontrer une proposition $\mathcal{P}$ est le suivant : on commence par supposer que $\mathcal{P}$ est fausse, puis on montre qu'on peut alors en déduire une contradiction, c'est-à-dire une proposition de la forme "$\mathcal{Q}$ et (non $\mathcal{Q}$)".

Méthode - Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $\mathcal{P}$ est vrai par l'absurde, on raisonne de la manière suivante.

Supposons que $\mathcal{P}$ est fausse.
$(\dots)$ alors il y a contraction.
Donc $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple. Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On sait donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux.

$$\text{Comme } \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{on a } 2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ donc } p^2 = 2q^2.$$

Ceci implique que p^2 est pair donc, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, p est pair. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Ainsi,

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad \text{donc } q^2 = 2k^2.$$

Par conséquent, q^2 est pair. À nouveau, ceci implique que q est pair. Finalement, on a montré que p est pair et q est pair, donc p et q ont 2 pour diviseur commun, et $\frac{p}{q}$ n'est pas sous forme irréductible, et il y a contradiction.
On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 10. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $\sqrt{n^2+2}$ n'est pas un entier.

2. Disjonction de cas

Raisonner par disjonction de cas. On peut séparer la démonstration d'une proposition en l'étude d'une liste exhaustive de sous-cas, chacun étant plus facile à traiter séparément.

Exemple. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est un entier pair.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous allons distinguer suivant la parité de n.
- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a alors $n(n+1) = 2k(n+1)$, qui est un entier multiple de 2, donc $n(n+1)$ est un entier pair.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair, et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$. On a alors $n(n+1) = 2kn$ qui est un entier multiple de 2, donc $n(n+1)$ est un entier pair.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est un entier pair.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence. On note $\mathcal{P}(n)$ une proposition qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*Initialisation*),
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*Hérédité*),

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode - Rédiger une démonstration par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $(\dots)$.
- *Initialisation.* $(\dots)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  $(\dots)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons donc montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Dans l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n (sinon, il n'y a plus rien à prouver !), mais bien que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier n fixé. On montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Remarque. On peut adapter ce raisonnement pour le cas où on souhaite montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de remplacer $\mathcal{P}(0)$ par $\mathcal{P}(n_0)$ dans l'initialisation, et de fixer un entier $n \geqslant n_0$ dans l'hérédité.

Exemple. Soit x un réel positif. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Nous allons raisonner par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$".
- *Initialisation.* On a $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$(1+x)^{n+1} \;=\; (1+x)(1+x)^n \;\geqslant\; (1+x)(1+nx).$$

  car d'après l'hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, et $1+x \geqslant 0$. Ainsi, on trouve en développant que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$, car $nx^2 \geqslant 0$. Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Remarque : Soient n_1, n_2 deux entiers naturels, si l'hérédité n'est valable que pour $n \in [\![n_1, n_2]\!]$, on parle de récurrence finie :

Si $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie et que $\forall n \in [\![n_1, n_2 - 1]\!], \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, alors $\forall n \in [\![n_1, n_2]\!], \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Récurrence double

Parfois, on ne parvient pas à déduire $\mathcal{P}(n+1)$ de $\mathcal{P}(n)$, mais on parvient à montrer $\mathcal{P}(n+2)$ en supposant que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. On peut alors modifier le raisonnement ci-dessus de la manière suivante.

- *Initialisation.* (...) donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
  (...) donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On dit alors qu'on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par *récurrence double.*

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$".

- *Initialisation.* On a $3^0 - 2^1 = -1 = u_0$ et $3^1 - 2^2 = -1 = u_1$, donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et montrons $\mathcal{P}(n+2)$. On a

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+2}\right) - 6\left(3^n - 2^{n+1}\right) = 9 \times 3^n - 4 \times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Remarque. Si nécessaire, on peut également faire des raisonnements par récurrence triple, voire des récurrences d'ordre supérieur.

Récurrence forte

Parfois, on a besoin de supposer que toutes les propositions $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies pour en déduire $\mathcal{P}(n+1)$. On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies". On parle de récurrence forte.

- *Initialisation.* (...) donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \leqslant n$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  (...) donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On dit alors qu'on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par *récurrence forte.*

4. Raisonnement par analyse synthèse

Méthode - Raisonner par analyse-synthèse

On utilise ce raisonnement :

- ⋄ lorsqu'on cherche à résoudre un problème du type "trouver tous les x tels que $\mathcal{P}(x)$" (par exemple : une équation ou une inéquation),
- ⋄ lorsqu'on cherche à montrer une proposition du type "il existe un unique x tel que $\mathcal{P}(x)$". Ceci revient d'ailleurs au cas ci-dessus, auquel on ajoute le fait qu'il y a une unique solution x.

On procède en deux étapes :

- **Analyse** : On suppose qu'il existe x tel que $P(x)$ est vraie et on cherche à en déduire des valeurs possibles de x. On raisonne par *conditions nécessaires.*

  Rédaction : Soit x tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
  (...) alors (nécessairement) $x \in \underbrace{\{\dots\}}_{\text{Ensemble des ``candidats''}}$.

  On obtient un ensemble qui contient tous les "candidats possibles" pour x. C'est-à-dire que x ne peut pas prendre d'autres valeurs, mais on ne peut garantir à ce stade que toutes ces valeurs sont solutions.

– **Synthèse** : “on vérifie si le ou les candidats sont valides”. Parmi les solutions candidats, on regarde lesquelles vérifient effectivement $\mathcal{P}(x)$. En d'autres termes, on détermine si les conditions nécessaires sont suffisantes.

On conclut ensuite en donnant l'intégralité des solutions, déterminées lors de la synthèse.

Lorsqu'on utilise ce raisonnement pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à un problème, on rédige de la manière suivante.

Analyse. Soit x une solution du problème.
$(\ldots)$ alors $x = x_0$.

Synthèse. On vérifie que x_0 est solution du problème.

Exemple. Résolvons l'équation $\sqrt{x} = 2x - 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ une solution de l'équation. En composant par la fonction carrée, on obtient alors

$$x \;=\; (2x-1)^2 \;=\; 4x^2 - 4x + 1, \quad \text{donc} \quad 4x^2 - 5x + 1 \;=\; 0.$$

Comme les racines de $4x^2 - 5x + 1$ sont 1 et $\frac{1}{4}$, on en déduit que $x \in \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$.

Synthèse. On constate que 1 est bien solution de l'équation, mais $\frac{1}{4}$ ne l'est pas.

On a donc montré que 1 est la seule solution de l'équation.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que g est constante, h vérifie $h(0) = 0$, et

$$f = g + h, \text{ c'est-à-dire que pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x) + h(x).$$

On dit aussi dans ce cas que f *s'écrit de manière unique* sous le forme $f = g + h$, où g est constante, et $h(0) = 0$.

Exercice 13. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction paire g et une unique fonction impaire h telles que $f = g + h$.