

Chapitre 2

Ensembles de nombres – Équations, inéquations

I Ensembles de nombres

Rappel. On rappelle qu'on note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers *naturels* : $0, 1, 2, 3, \dots$, on note par ailleurs $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls,

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers *relatifs* : $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$,

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des *rationnels*, c'est-à-dire les réels qui s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, on note par ailleurs $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs, et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs.

On note également $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$, pour préciser que ces ensembles sont privés de 0. On rappelle qu'on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1. Forme irréductible et manipulations dans $\mathbb{Q}$ **Théorème - Forme irréductible**

Tout élément r de $\mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, et $q \in \mathbb{N}^*$, où p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 et -1 . On appelle cette écriture la *forme irréductible* de r .

Manipulation des éléments de $\mathbb{Q}$ **Proposition - Règles de calcul**

Soient $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$i. a = \frac{a}{1}$$

$$iv. \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$vi. \text{ si } c \neq 0, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$ii. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$iii. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$v. \text{ si } c \neq 0, \frac{\frac{a}{b} \times c}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

$$vii. \text{ si } c \neq 0, \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}$$

2. Rappels dans $\mathbb{R}$

a. Puissances

Définition - Puissance

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le réel x^n par

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Remarques.

- Par convention, $0^0 = 1$.
- En particulier, $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$ et $x^{-1} = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

Proposition - Règles de calcul

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $n, p \in \mathbb{Z}$, on a les règles de calcul suivantes :

$$i. x^{n+p} = x^n \times x^p,$$

$$iii. (xy)^n = x^n \times y^n,$$

$$v. (x^n)^p = x^{n \times p}.$$

$$ii. x^{n-p} = \frac{x^n}{x^p},$$

$$iv. \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},$$

⚠ Attention, $x^n + y^n \neq (x + y)^n$. Par exemple $1^3 + 1^3 = 1 + 1 = 2$ mais $(1 + 1)^3 = 2^3 = 8$.

Remarques.

- À bien connaître : $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ Par ailleurs, $\frac{1}{(-1)^n} = \left(\frac{1}{-1}\right)^n = (-1)^n$.
- Il peut être utile d'écrire des nombres de la forme $(-a)^n$ comme $(-a)^n = ((-1) \times a)^n = (-1)^n \times a^n$.

Exercice 1. Réduire $\frac{x^6}{(-x^{-2})^3}$.

b. Développer, factoriser**Rappel.**

- Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
- Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit.

Proposition - Identités remarquables

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et n un entier non nul. On a les égalités suivantes.

i. Développement de $(a + b)^n$:

$$n = 2 : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$n = 3 : (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

ii. Factorisation de $a^n - b^n$:

$$n = 2 : a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$n = 3 : a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$\text{Cas général : } a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad \text{Formule de Bernoulli.}$$

Nous verrons également plus loin une formule générale pour développer $(a + b)^n$, appelée formule du binôme de Newton.

Démonstration. i. Il suffit de développer les expressions "à la main" pour parvenir au résultat.

ii. Démontrons la formule générale, dite de Bernoulli : en développant, on trouve

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \dots + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} - (\cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \dots + \cancel{ab^{n-1}} + b^n).$$

On observe que les termes de cette dernière expression s'annulent deux à deux, à l'exception du premier et du dernier. On obtient donc bien $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$. $\square$

Remarque. Les identités remarquables permettent de développer plus rapidement certaines expressions mais aussi d'en factoriser d'autres. Il faut les connaître, et les reconnaître d'un coup d'œil pour se faciliter les calculs.

Exercice 2. Développer $(x + 2)(x + 3)(x - 2)(x - 3)$ et factoriser $(4x + 8)(x - 2) + (4 - 2x)x + (x + 3)(6 - 3x)$.

c. Racine carrée

Proposition–Définition - Racine carrée

Soit x un réel positif. Il existe un unique réel positif t tel que $t^2 = x$. On appelle ce réel la *racine carrée* de x et on le note $\sqrt{x}$.

Ce résultat repose sur le théorème de la bijection, que nous reverrons plus loin.

Proposition - Règles de calcul

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$i. (\sqrt{x})^2 = x, \quad ii. \sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}, \quad iii. \text{ si } y \neq 0, \text{ alors } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Démonstration. i. C'est la définition de la racine carrée : $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif dont le carré vaut x .

ii. On a $(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy$, donc par définition de la racine carrée, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

iii. Le raisonnement est le même : $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2 = \frac{\sqrt{x}^2}{\sqrt{y}^2} = \frac{x}{y}$, donc $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. □

⚠ En général, $\sqrt{x^2} \neq x$! Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.

En général, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$! Par exemple, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1+1 = 2$.

Exercice 3. Simplifier $4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$.

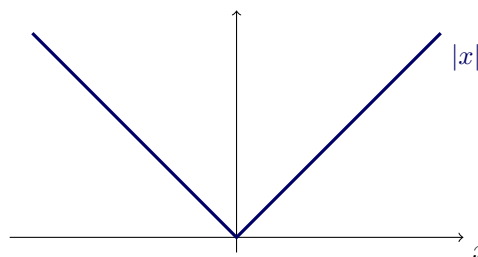
d. Valeur absolue

Définition - Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x est le réel, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Graphes de la fonction $x \mapsto |x|$:



Exemple. $|2| = 2$, $|-4| = 4$.

Remarques.

- La valeur absolue d'un réel est toujours positive. De plus, si x est un réel, alors $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 - ★ $|x| = |-x|$,
 - ★ $|x| = \max(x, -x)$,
 - ★ $|x|^2 = x^2$.

Exercice 4. Donner, en fonction de x , une expression sans valeur absolue de la quantité $|x-3| - |x+2|$.

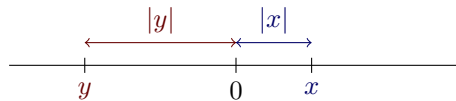
Solution. Étudions le signe des deux expressions concernées dans un tableau :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	

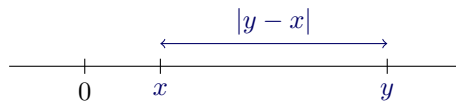
Ainsi,

- ★ si $x \geq 3$, $|x - 3| - |x + 2| = x - 3 - (x + 2) = -5$.
- ★ si $x \in [-2, 3]$, $|x - 3| - |x + 2| = 3 - x - (x + 2) = -2x + 1$.
- ★ si $x \leq -2$, $|x - 3| - |x + 2| = 3 - x - (-(x + 2)) = 5$.

Remarque. La valeur absolue d'un réel x correspond à la distance (toujours positive) sur la droite réelle entre x et 0.



Plus généralement, si x et y sont deux réels, alors $|y - x| = |x - y|$ correspond à la distance sur la droite réelle entre x et y .



Proposition - Valeur absolue et (in)égalités

Soient x un réel et a un réel positif.

- i. $|x| = a$ si et seulement si $x = a$ ou $x = -a$.
- ii. $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.
- iii. $|x| > a$ si et seulement si $x > a$ ou $x < -a$.

Remarque.

- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $-|x| \leq x \leq |x|$.
- Si x et y sont deux réels et $h > 0$, alors

$$|y - x| \leq h \Leftrightarrow -h \leq y - x \leq h \Leftrightarrow x - h \leq y \leq x + h \Leftrightarrow y \in [x - h, x + h].$$

En d'autres termes, $|y - x| \leq h$ si et seulement si y appartient au segment représenté ci-dessous.



Théorème - Règles de calcul et inégalités triangulaires

Soient x et y deux réels. On a les propriétés suivantes.

- i. $|x| = \sqrt{x^2}$.
- ii. $|xy| = |x| \times |y|$ et si de plus y est non nul, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- iii. *Inégalité triangulaire* : $|x + y| \leq |x| + |y|$,
Deuxième inégalité triangulaire : $|x + y| \geq |x| - |y|$ et $|x + y| \geq |y| - |x|$
Ceci se réécrit de manière plus concise : $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

Démonstration. i. On sait que $|x|^2 = x^2$, donc d'après la définition de la racine carrée, on a bien $\sqrt{x^2} = |x|$.

ii. On peut bien sûr faire une disjonction de cas suivant les signes de x et de y , mais on peut aussi exploiter les propriétés de la racine carrée : $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$.

Par ailleurs, si $y \neq 0$, on a $1 = |y \times \frac{1}{y}| = |y| \times |\frac{1}{y}|$ donc $|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$. Par conséquent, $|\frac{x}{y}| = |x \times \frac{1}{y}| = |x| \times |\frac{1}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

iii. Voir TD. □

- ⚠ – L'inégalité $|x - y| \leq |x| - |y|$ est fausse en général ! Contre-exemple : $x = 1$ et $y = 2$.
 – L'implication $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|$ est fausse en général ! Contre-exemple : $-2 \leq 1$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $y \in [-2, 1]$, on a $|x + 2y| \leq 5$.

Remarque. *Caractérisation d'une partie bornée.* Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que : pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$.



Python.

La fonction valeur absolue s'utilise avec la commande `abs`. Elle se trouve aussi dans la librairie `numpy`, et s'utilise alors via la commande `np.abs`.

e. Inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition - Ordre dans $\mathbb{R}$

- ★ On dit que a est inférieur ou égal à b (resp. supérieur ou égal à b) et on note $a \leq b$ (resp. $a \geq b$) si $b - a$ est positif (resp. négatif).
- ★ On dit que a est strictement inférieur à b (resp. strictement supérieur à b) et on note $a < b$ (resp. $a > b$) si $b - a$ est strictement positif (resp. strictement négatif).

Remarque. Si $a < b$, alors $a \leq b$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Proposition - Somme et produit d'inégalités

- i. *Somme d'inégalités* : – si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$,
 – si de plus $a < b$ ou $c < d$ alors $a + c < b + d$.
- ii. *Produit d'inégalités positives* : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$.

Démonstration.

i. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $b - a \in \mathbb{R}_+$ et $d - c \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $(b + d) - (a + c) = \underbrace{b - a}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{d - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+$, donc $a + c \leq b + d$.

Si de plus $a < b$, alors $b - a \in \mathbb{R}_+^*$, donc $b - a + d - c \in \mathbb{R}_+^*$, et $a + c < b + d$. De même pour l'autre cas.

ii. On a $bd - ac = bd - bc + bc - ac = b(\underbrace{d - c}_{\in \mathbb{R}_+}) + c(\underbrace{b - a}_{\in \mathbb{R}_+}) \in \mathbb{R}_+$, car $b \geq 0$ et $c \geq 0$. Ainsi, on a $0 \leq ac \leq bd$. □

⚠ On ne peut en revanche pas soustraire les inégalités ! Par exemple, $0 \leq 1$ et $0 \leq 2$, mais $0 \not\leq 1 - 2 = -1$.

Composition et inégalités. Il est très important de bien savoir utiliser la monotonie d'une fonction f pour déduire d'une inégalité $a \leq b$ que $f(a) \leq f(b)$ ou $f(a) \geq f(b)$.

Rappel. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, deux réels a et b dans I , et f une fonction définie sur I .

- Si f est *croissante* sur I , alors $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

- Si f est *décroissante* sur I , alors $a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- Si f est *strictement croissante* sur I , alors $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.
- Si f est *strictement décroissante* sur I , alors $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$.

⚠ Si f est seulement croissante, on n'a pas en général $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$. Si on considère par exemple la fonction constante égale à 1, qui est constante donc croissante, on a $f(2) \leq f(1)$ car $f(1) = f(2) = 1$, mais $2 \not\leq 1$.



Méthode - Rédaction

Pour montrer que $f(a) \leq f(b)$ lorsque $a \leq b$, il faut :

- identifier la fonction f et chercher un intervalle I sur lequel f est croissante,
- vérifier que a et b appartiennent à l'intervalle I .

La démarche est analogue pour montrer que $f(a) \geq f(b)$ lorsque $a \leq b$ avec si f est décroissante.

Proposition

Soient a et b deux réels.

- Ajout d'un réel.* Si $a \leq b$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $a + c \leq b + c$.
- Multiplication par un réel.*
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$: si $a \leq b$, alors $\lambda a \leq \lambda b$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}_-$: si $a \leq b$, alors $\lambda a \geq \lambda b$.
- Passage à l'inverse.* Si $a \leq b$ et a et b sont strictement positifs (ou strictement négatifs), alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto x + c$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc si $a \leq b$, alors $f(a) = a + c \leq f(b) = b + c$.
- La fonction $f : x \mapsto \lambda x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et décroissante si $\lambda \in \mathbb{R}_-$, on en déduit le résultat.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \leq b$, alors $f(a) = \frac{1}{a} \geq f(b) = \frac{1}{b}$. De même si $a, b \in \mathbb{R}_-^*$, car f est également décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

N.B. : les résultats de cette proposition peuvent aussi être démontrés directement à partir de la définition ci-dessus. □

II Résolution d'équations et d'inéquations

Domaine de validité.

Lorsque l'on doit résoudre une équation ou une inéquation, on commence toujours par *déterminer le domaine de validité* de cette (in)équation (ou domaine d'existence des solutions). C'est l'ensemble des réels pour lesquels l'(in)équation a un sens, *i.e.* pour lesquels les expressions qui la composent sont bien définies.

Résoudre l'(in)équation, c'est alors déterminer, dans ce domaine de validité, quels sont les réels satisfaisant cette (in)équation.

Exemple. Le domaine de validité de l'équation $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ est $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$.



Méthode - Résolution d'équation ou inéquation

On cherche à se ramener à :

- des équations de la forme $\underbrace{A(x)B(x)}_{\Leftrightarrow A(x)=0 \text{ ou } B(x)=0} = 0$ ou $\underbrace{\frac{A(x)}{B(x)}}_{\Leftrightarrow A(x)=0} = 0$ (éventuellement avec plus de facteurs),

- des inéquations de la forme $A(x)B(x) \geq 0$ ou $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ (éventuellement avec plus de facteurs) :

il s'agit alors de déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient, qu'on fait *via* un *tableau de signe*.

Pour ce faire, on cherchera à

- ★ passer tous les termes du même côté pour comparer à 0,
- ★ réduire tous les termes au même dénominateur le cas échéant,
- ★ factoriser au maximum.

Remarque. Dans le cas d'une équation, on peut utiliser l'équivalence : $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$.

Exercice 7. Déterminer le signe de $f(x) = x^2e^x - (2x + 1)e^x + 2e^x$ selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

1. Résolution des équations et inéquations de type polynomial

a. **Étude de $ax + b$, $a \neq 0$**

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

a. $x(x + 2) = 2x(3x - 4)$.

b. $\frac{2}{x} \geq \frac{4}{x + 4}$.

b. **Étude de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$**

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. Le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ est la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de solutions réelles
Forme factorisée	$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$	signe de a sur $\mathbb{R}$	signe de a sur $\mathbb{R}$

Exercice 9. Résoudre $\frac{(3x - 1)(x + 2)}{x + 1} < (2 - 6x)(4x + 3)$.

Exercice 10. Résoudre selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation $(m + 2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

c. **Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3**

On cherche à factoriser l'expression $A(x)$ pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :

- ★ soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
- ★ soit on trouve une *racine évidente* x_0 , telle que $A(x_0) = 0$. Dans ce cas, il est possible d'écrire

$$A(x) = (x - x_0)B(x),$$

où le degré de $B(x)$ est $\deg A - 1$. On écrit le polynôme $B(x)$ avec des coefficients inconnus, puis on trouve la valeur de ses coefficients en développant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

a. $x^3 + 5x - 2 = 4x^2$.

b. $x^4 - x < 0$.

c. $\frac{-2x^2 + 3x - 10}{-x^3 + 7x^2 - 14x + 8} \geq 0$.

2. Avec des valeurs absolues

Pour résoudre une équation ou une inéquation composant des valeurs absolues, on cherche à récrire l'équation sans valeur absolue. Pour ce faire, nous listons deux méthodes.

1^{ère} méthode : on utilise la définition de la valeur absolue, qui conduit alors faire une disjonction de cas, suivant le signe du contenu de chaque valeur absolue.

Exemple. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|x - 4| = 2x + 10$: on sait que $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \geq 4, \\ -x + 4 & \text{si } x < 4. \end{cases}$

- Recherche de solutions sans $[4, +\infty]$: l'équation devient $x - 4 = 2x + 10$, c'est-à-dire $x = -14$. Comme $-14 \notin [4, +\infty]$, il n'y a pas de solution dans $[4, +\infty]$.
- Recherche de solutions sans $] -\infty, 4[$: l'équation devient $-x + 4 = 2x + 10$, c'est-à-dire $x = -2$. Comme $-2 \in] -\infty, 4[$, c'est bien une solution.

Finalement, -2 est la seule solution.

2^{ème} méthode : on peut aussi parfois se ramener à une équation sans valeur absolue en élevant au carré si on peut le faire : voir paragraphe suivant.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

a. $|x - 4| > 13$.

b. $|x - 2| = |2x + 3|$.

c. $|x - 1| \leq x + 2$

d. $|x + 3| \leq |x - 1|$.

3. Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

a. Composition par une fonction strictement monotone

Comme on l'a revu, si une fonction f est *strictement croissante* sur un intervalle I et $a, b \in I$, alors

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \quad \text{et} \quad a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

⚠ Si la fonction est seulement croissante, on ces équivalences ne sont pas vraies en général, seule l'implication directe l'est.



Méthode

On peut utiliser une fonction strictement croissante pour changer :

- une équation $A(x) = B(x)$ en l'équation équivalente $f(A(x)) = f(B(x))$,
- ou une inéquation $A(x) \leq B(x)$ en l'inéquation équivalente $f(A(x)) \leq f(B(x))$,

à condition d'avoir vérifié au préalable que f est strictement monotone sur I et $A(x), B(x) \in I$ pour tout x . Les résultats sont bien sûr analogues dans le cas d'une fonction strictement décroissante.

Nous citons ci-dessous les exemples classiques de composition par les fonctions exponentielle et logarithme, ou la fonction carrée.

Fonctions logarithme et exponentielle

Propriétés du logarithme. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tous $a > 0$, $b > 0$ et p réel :

i. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,

ii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$,

iii. $\ln(a^p) = p \ln a$.

Propriétés de l'exponentielle. La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour tous a, b réels :

$$e^a e^b = e^{a+b}, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad (e^a)^b = e^{ab}.$$

Exponentielle et logarithme. Les fonctions exponentielle et logarithme sont des bijections réciproques l'une de l'autre. En particulier :

- i. pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln a} = a$,
- ii. pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\ln(e^b) = b$.

Exemple. Résolution de l'équation $2 \ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$.

Domaine de validité : l'équation a un sens si et seulement si $x+1 > 0$, $x-1 > 0$ et $2x-1 > 0$, ce qui revient à dire que $x > 1$. Nous allons donc chercher les solutions dans $D =]1, +\infty[$.

Les propriétés de la fonction $\ln$ assurent que l'équation se réécrit $\ln((x+1)^2) = \ln((x-1)(2x-1))$. Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln((x+1)^2) = \ln((x-1)(2x-1)) \Leftrightarrow (x+1)^2 = (x-1)(2x-1).$$

On va donc résoudre cette dernière équation sur le domaine D : on a

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (x-1)(2x-1) &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 - 3x + 1 \\ & &\Leftrightarrow x^2 - 5x &= 0 \\ & &\Leftrightarrow x(x-5) &= 0. \end{aligned}$$

Comme $0 \notin D$ et $5 \in D$, l'équation a une unique solution, qui est 5.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $e^{x+1} e^{3x-4} > 1$.

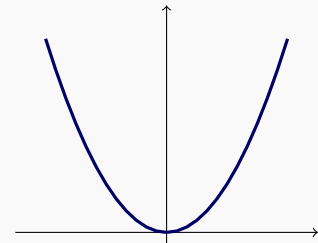
b. $(e - e^{2x})(e^x - 1) \leq 0$.

Fonction carrée

La fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, si $a, b \in \mathbb{R}$ alors :

- si a et b sont de même signe, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$,
- si a et b sont positifs, alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$,
- si a et b sont négatifs, alors $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$.



Retour sur le paragraphe précédent : on peut utiliser ce qui précède pour résoudre des (in)équations avec des valeurs absolues en élevant au carré. Pour ce faire, il faut s'assurer que les deux membres sont bien toujours du même signe.

Exemple. Résolution de l'inéquation $|x-1| \leq x+2$:

- On remarque pour commencer que si $x < -2$, c'est-à-dire $x+2 < 0$, alors $|x-1| \geq 0 > x+2$, donc x n'est pas solution. Finalement, il n'y a donc pas de solution de l'inéquation dans l'intervalle $]-\infty, -2[$.
- On se ramène à la résolution de l'inéquation dans $I = [-2, +\infty[$. Si $x \in I$, les deux membres sont positifs, donc l'inéquation est équivalente à $(x-1)^2 \leq (x+2)^2$. On a donc

$$\begin{aligned} |x-1| \leq x+2 &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x+2)^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &\leq x^2 + 4x + 4 \\ & &\Leftrightarrow 6x + 3 &\geq 0 \\ & &\Leftrightarrow x &\geq -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ est contenu dans $[-2, +\infty[$, les réels de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ sont bien solutions.

Finalement, l'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

$$a. \sqrt{x^2 + 2x} < x + 1$$

$$b. \sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x}$$

b. Changement de variable

Il s'agit de poser un changement de variable pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre, polynomiale de bas degré par exemple. Pour ce faire, on remplace l'équation avec inconnue x par une équation équivalente, d'inconnue $y = \varphi(x)$.

On posera par exemple $y = e^x$, $y = \ln(x)$, $y = x^2$, ou encore $y = \sqrt{x}$.



Méthode - Résolution d'équation par changement de variable

1. Écrire l'équation pour la nouvelle inconnue $y = \varphi(x)$, et la résoudre.
2. Pour chacune des solutions y de la nouvelle équation, résoudre l'équation $y = \varphi(x)$, d'inconnue x , pour retrouver les solutions de l'équation de départ.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

$$a. x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

$$b. x^4 - 3x^2 + 2 < 0.$$

$$c. e^x + e^{1-x} = e + 1.$$

Solution.

- a. En introduisant le changement de variable $y = x^2$, l'équation devient $y^2 - 3y + 2 = 0$, qui admet deux solutions : 1 et 2. Les solutions de l'équation de départ sont alors les réels x tels que $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

- b. On a $y^2 - 3y + 2 < 0 \Leftrightarrow y \in]1, 2[$, donc

$$x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 2 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[.$$

- c. En multipliant les deux membres de l'équation par $e^x > 0$, on obtient

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \Leftrightarrow e^{2x} + e = (e + 1)e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - (e + 1)e^x + e = 0.$$

On introduit le changement de variable $y = e^x$, et on résout $y^2 - (e + 1)y + e = 0$. Le discriminant du trinôme $y^2 - (e + 1)y + e$ est $\Delta = (e - 1)^2 > 0$, donc

$$y^2 - (e + 1)y + e = 0 \Leftrightarrow y = \frac{e + 1 - (e - 1)}{2} = 1 \text{ ou } y = \frac{e + 1 + (e - 1)}{2} = e.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les réels x tels que $e^x = 1$ ou $e^x = e$, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est $\{0, 1\}$.

4. Inégalités et étude de fonction

Si on souhaite montrer qu'une inégalité est vraie pour tout x dans un intervalle I , on peut se ramener à étudier le signe d'une fonction bien choisie.



Méthode - Pour montrer que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$

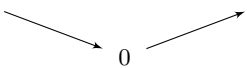
- ★ On introduit la fonction $h : x \mapsto g(x) - f(x)$.
- ★ On étudie le signe de la fonction h , en étudiant d'abord ses variations si besoin. Le résultat s'en déduit.

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Solution. On introduit la fonction h définie par $h(x) = e^x - x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer que h est positive sur $\mathbb{R}$ pour conclure. Pour ce faire, nous allons étudier ses variations : h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Intéressons-nous donc au signe de h' : on a

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln(1) = 0,$$

où on a composé la dernière inégalité par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On déduit donc le tableau de variation de h .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$			

Finalement, $h(x) \geq h(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne bien que h est positive sur $\mathbb{R}$, d'où le résultat.