Chapitre 3

Étude de fonction, fonctions usuelles

I Généralités sur les fonctions réelles

1. Définition

Définition - Fonction

- ⋆ Une fonction f réelle est un procédé qui associe à chaque élément x de $\mathbb{R}$ au plus un réel, noté $f(x)$. La fonction f est alors notée $f : x \mapsto f(x)$.
- ⋆ L'ensemble (le plus grand) des x pour lesquels $f(x)$ est bien défini est appelé l'ensemble de définition de la fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Exemples.
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x-1}$ a pour ensemble de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ a pour ensemble de définition $\mathcal{D}_g =]5, +\infty[$.

Remarque. On commencera toute étude de fonction par l'étude de l'ensemble de définition.

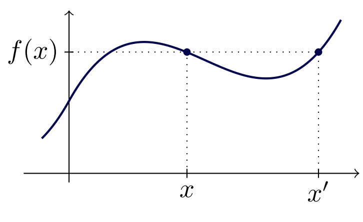
2. Image, antécédent, graphe

Définition - Image, antécédent, graphe

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

- ⋆ Si $x \in E$, $y \in \mathbb{R}$ et $y = f(x)$, on dit que
  - y est *l'image* de x par f,
  - x est *un antécédent* de y par f.
- ⋆ On appelle *ensemble image de* f, ou simplement *image de* f l'ensemble des images par f des éléments de E. On le note $f(E)$. On a ainsi $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$.
- ⋆ Le *graphe* de f (ou la courbe représentative de f) est l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, f(x))$, où $x \in E$. En d'autres termes, il s'agit du sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$.

Remarque. Il faut bien noter qu'il ne peut y avoir qu'un élément x de E ne peut avoir qu'une seule image (sinon la définition de f est ambigüe). En revanche, un élément y de $\mathbb{R}$ peut avoir plusieurs antécédents.



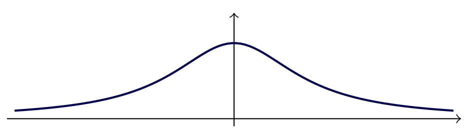
Exemple. On a $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$, et $\ln(\mathbb{R}_+^\star) = \mathbb{R}$.

Remarque. Pour déterminer l'ensemble image d'une fonction continue, on peut avoir recours à son tableau de variations.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble image de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ entier et continue. L'étude des variations de f mène au tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



On en déduit que l'ensemble image de f est $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

3. Opérations sur les fonctions

Définition - Somme, produit, quotient de fonctions

Soient f et g des fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit les fonctions :

$\lambda f \ : \ x \mapsto \lambda f(x)$, définie sur $\mathcal{D}_f$ $\qquad f+g \ : \ x \mapsto f(x)+g(x)$, définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$,

$fg \ : \ x \mapsto f(x)g(x)$, définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ $\qquad \dfrac{1}{f} \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$, définie sur $\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_f, \ f(x) \neq 0\}$.

Définition - Composée de deux fonctions

Soient f et g des fonctions réelles définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ telles que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$.
On appelle *composée de f par g* la fonction

$$g \circ f \ : \ x \mapsto g(f(x)), \quad \text{définie sur } \mathcal{D}_f.$$

Remarque. Sous les hypothèses ci-dessus, la fonction $g \circ f$ est bien définie. En effet, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, le réel $g(f(x))$ a un sens car $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Si cette condition n'est pas vérifiée pour tout x dans un ensemble E, on ne peut pas parler de $g \circ f$ sur E.

Exemple. Si h est la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2+3)$ définie sur $\mathbb{R}$, alors $h = g \circ f$, où $f : x \mapsto x^2+3$ et $g : x \mapsto \sin x$.

Exercice 2. On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Quels sont leurs ensembles de définition ? Déterminer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$, en précisant le domaine de définition.

⚠ En général, même lorsqu'elles existent toutes les deux, $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas les mêmes fonctions !

4. Parité, imparité, périodicité

Certaines propriétés d'une fonction réelle permettent d'étudier la fonction sur un domaine d'étude plus petit que l'ensemble de définition et en déduire ensuite les variations ou le graphe de la fonction sur tout l'ensemble de définition.

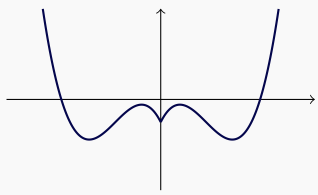
Définition - Fonction paire, impaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est dite *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = f(x).$$

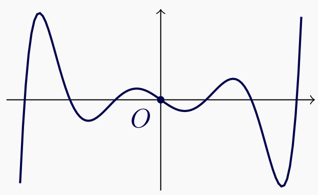
  Graphiquement, la courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La fonction f est dite *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -f(x).$$

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point O, origine du repère.



On étend ces deux définitions au cas où f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, qui est tel que pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$.

Remarque. Lorsqu'une fonction f définie sur E est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}_+$ puis en déduire par symétrie l'étude de f sur E entier. On prendra donc l'habitude de vérifier si une fonction est paire ou impaire avant de l'étudier.

Exemples.

1. Les fonctions constantes sont paires. La fonction valeur absolue est paire. La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire. Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n pair sont paires.
2. La fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire. Plus généralement, toutes les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont impaires.

Définition - Fonction périodique

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est périodique s'il existe $T > 0$ tel que '

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

Dans ce cas, f est dite T-périodique, et on dit que T est *une* période de f.

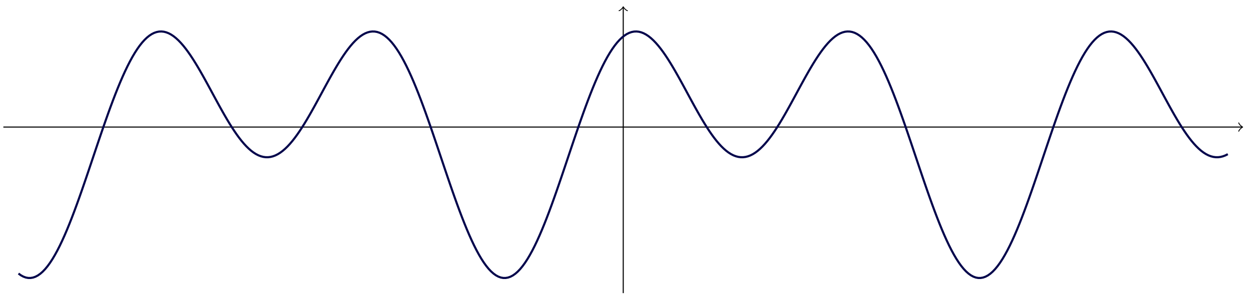
On étend la définition au cas où f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui est tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in E \ \Leftrightarrow\ x + T \in E.$$

Remarque. Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par translation de vecteur $T(1,0) = (T,0)$. Ainsi, lorsqu'une fonction est T-périodique, il suffit de l'étudier et de tracer son graphe sur un intervalle de longueur T. On complète ensuite par translation.

Exemples.
- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout $T > 0$.

Remarque. Lorsqu'une fonction est T-périodique, elle est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc. Cela dit, on prend l'habitude de rechercher la plus petite période possible.



Courbe représentative de la fontion $x \mapsto 2\sin(x) + 3\cos(2x)$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(3x)$ est périodique.

Solution. Comme sin est 2π-périodique, on a $\sin(3x) = \sin(3x + 2\pi) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\quad f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x).$$

On a donc montré que f est $\frac{2\pi}{3}$-périodique sur $\mathbb{R}$.

II Variations d'une fonction

1. Fonction majorée, minorée, bornée

Définition - Fonction majorée, minorée, bornée

Soit f une fonction réelle définie sur E.

- ⋆ On dit que f est *majorée* s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x de E, $f(x) \leqslant M$.
- ⋆ On dit que f est *minorée* s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ telle que pour tout x de E, $f(x) \geqslant m$.
- ⋆ On dit que f est *bornée* si f est minorée et majorée.

Remarques.

- La fonction f est majorée sur E (*resp. minorée*) si et seulement si son ensemble image $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$ est majoré (*resp. minoré*).

– La fonction f est bornée sur E si et seulement si $|f|$ est majorée *i.e.* ssi

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ |f(x)| \leqslant M.$$

Exemples. – La fonction exp est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
– La fonction cos est bornée.

2. Monotonie

Définition - Fonctions monotones, strictement monotones

Soit f une fonction réelle définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

- ⋆ On dit que
  - ◇ f est *constante* sur E si $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ f(x) = a$,
  - ◇ f est *croissante* sur E si $\forall (x,y) \in E^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$,
  - ◇ f est *décroissante* sur E si $\forall (x,y) \in E^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)$,
  - ◇ f est *strictement croissante* sur E si $\forall (x,y) \in E^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$,
  - ◇ f est *strictement décroissante* sur E si $\forall (x,y) \in E^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$.
- ⋆ On dit que f est *monotone* sur E si f est croissante ou décroissante sur E tout entier. On parle de *stricte monotonie* lorsque la croissance ou la décroissance est stricte.

Remarques. – Une fonction strictement monotone est monotone.
– Une fonction constante est croissante et décroissante.

Proposition

Si f est strictement croissante sur E et $x, y \in E$, on a l'équivalence

$$x \leqslant y \ \Leftrightarrow\ f(x) \leqslant f(y).$$

Si f est strictement décroissante, on a $x \leqslant y \ \Leftrightarrow\ f(x) \geqslant f(y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in E$. La première implication $x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$ est donnée par la définition de la croissance de f.
Montrons la seconde implication : $f(x) \leqslant f(y) \ \Rightarrow\ x \leqslant y$. Il suffit de voir qu'il s'agit de la contraposée de l'implication $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, qui est vraie d'après la stricte croissance de f. □

Remarque. Si f est croissante sur E et $x, y \in E$, on remarque que la contraposée de $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ donne l'implication $f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$, qui peut s'avérer utile.

Proposition - Monotonie et somme

Si deux fonctions f et g définies sur un ensemble E ont même monotonie, alors $f + g$ a la même monotonie que f et g. Si de plus l'une des deux est strictement monotone, alors $f + g$ est strictement monotone.

Démonstration. Voir TD. □

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^\star$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^\star$.

Proposition - Monotonie et composition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. On suppose que :

- $\star$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathcal{D}_g$ (pour que $g \circ f$ soit une fonction bien définie),
- $\star$ f et g sont monotones sur leur ensemble de définition.

Alors : *i.* si f et g sont de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
ii. si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration. Montrons un des cas, les autres sont analogues, et laissés en exercice. Supposons que f et g sont décroissantes, respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, et montrons que $g \circ f$ est croissante.

Soient $x, y \in \mathcal{D}_f$ tels que $x \leqslant y$. Par décroissance de f, on a alors $f(x) \geqslant f(y)$. Par décroissance de g désormais, ceci entraîne que $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(y)$.

On a donc bien montré que $g \circ f$ est croissante. □

Exemple. Considérons les fonctions $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f : x \mapsto -x^3$. Exprimer $g \circ f$, quelle est sa monotonie ?

Si la fonction étudiée est définie sur un *intervalle* et si la fonction est dérivable alors il existe un critère pratique, admis pour le moment.

Proposition - Monotonie et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur I.

i. Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.

ii. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement un nombre fini de points, alors f strictement croissante sur I.

On a le résultat analogue en cas de décroissance : si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$ (*resp.* $f'(x) < 0$ sauf éventuellement un nombre fini de points), alors f est décroissante (*resp.* strictement décroissante) sur I.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction f' donnée par $f'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

– *Rappels sur la dérivation* ♡ *:* si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, alors les fonctions λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$), $f+g$, uv, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont dérivables sur I, et :

$$(\lambda f)' = \lambda u', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad (f+g)' = f' + g', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dérivation composée : soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J, si pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x)).$$

– Il faut toujours préciser (et montrer si besoin) qu'une fonction est dérivable avant de dériver.

– Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux.

Méthode - Étude de fonction

Pour étudier une fonction, on suivra les étapes suivantes.

1. On détermine le domaine de définition.
2. On détermine le domaine d'étude (parité, imparité, périodicité, ...).
3. On étudie les variations (par opérations ou dérivation).
4. On calcule les limites aux bornes du domaine (si on souhaite tracer la courbe représentative ou donner le tableau des variations).

5. On dresse le tableau des variations et on trace la courbe représentative si demandé.

3. Inégalité et étude de fonctions

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, on peut avoir recours à l'étude de fonctions pour montrer certaines inégalités.

Méthode - Montrer une inégalité par étude de fonction

- ⋆ Pour montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, on peut étudier la fonction f.
- ⋆ Pour montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$, on peut étudier la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leqslant x$.
2. Quelle inégalité obtient-on pour $x \in \mathbb{R}_-$?

⚠ Une erreur classique est de déduire que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x lorsqu'on a vérifié que $f'(x) \leqslant g'x)$ pour tout x. Chercher un contre-exemple !

III Fonctions bijectives, théorème de la bijection

1. Fonctions bijectives

Définition - Bijection

Soient f une fonction réelle et E et F des parties de $\mathbb{R}$. On dit que f est *bijective* de E sur F si tout élément de F admet un unique antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

En d'autres termes, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x, admet une unique solution dans E.

Remarque. On prendra garde à *toujours préciser* les ensembles E et F lorsqu'on dit qu'une fonction est bijective.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 2x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En effet, si $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = 2x$ admet une unique solution, donnée par $x = \frac{y}{2}$.

Définition - Réciproque

Soit f une fonction réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$, on note $F = f(E)$ son ensemble image. On dit qu'une fonction g définie sur F est fonction *réciproque* de f si

$$\forall x \in E,\ g(f(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ f(g(y)) = y.$$

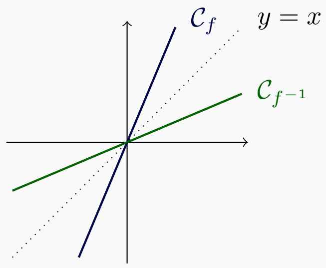
Proposition - Bijection et réciproque

Une fonction f est bijective de E sur F si et seulement si elle admet une fonction réciproque.

Dans ce cas, cette réciproque est unique, et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y).$$

De plus, le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exemple. La réciproque de la fonction $f : x \mapsto 2x$ est la fonction $f^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{2}$. Les deux graphes sont représentés dans l'exemple ci-dessus.

On se contente d'énoncer le théorème de la bijection qui nous sera utile par la suite. Nous rencontrerons à nouveau ce résultat plus tard, et l'étudierons en détails.

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I, alors f est une bijection de I sur son ensemble image $f(I)$.

En particulier, si $I = [a, b]$, on a plus précisément :

- si f est strictement croissante, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$,
- si f est strictement décroissante, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0, = +\infty[$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
2. La fonction $g : x \mapsto \sin x$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[g(0), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Remarque. Comme nous le verrons, ce résultat repose sur :

- le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que tout élément y de l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent,
- la stricte monotonie de f pour montrer que cet antécédent est unique.

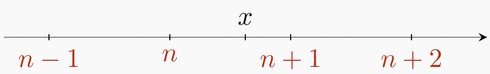
IV Fonctions usuelles

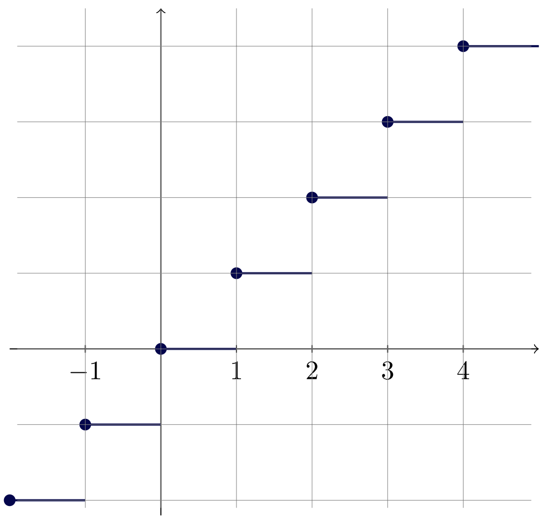
Nous avons déjà rencontré les fonctions polynomiales (de degré 1, 2, voire de degré supérieur), ainsi que la fonction valeur absolue. Nous allons ici nous pencher sur d'autres fonctions usuelles, qu'il conviendra de bien connaître.

1. Partie entière

Proposition–Définition - Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
Cet entier est appelé la *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.





Remarque. Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

ou, de manière équivalente, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$.
   b. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Python.

La fonction partie entière se trouve dans la librairie `numpy` et s'utilise avec la commande `np.floor`.

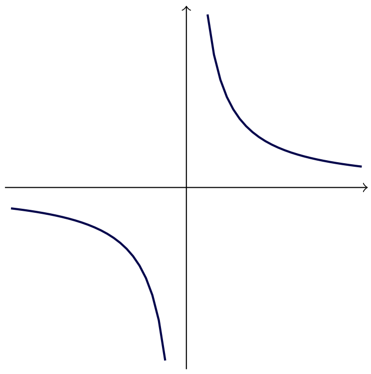
2. Fonctions inverse et ses puissances

Fonction inverse. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$f \;:\; x \;\mapsto\; \frac{1}{x}.$$

- La fonction inverse est impaire.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$



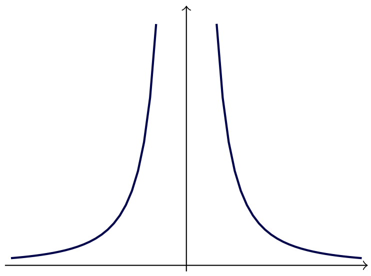
Graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Généralisation. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et

$$f \;:\; x \;\mapsto\; \frac{1}{x^n}.$$

- La fonction f est paire si n est pair, et impaire si n est impair.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$



Graphe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

3. Fonctions racines

Racine carrée

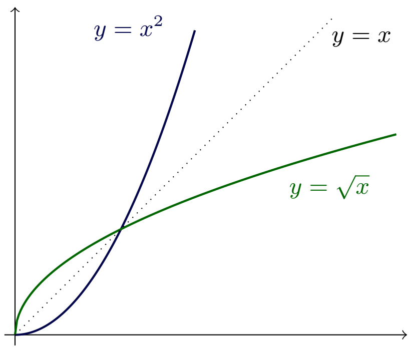
On sait que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, le théorème de la bijection affirme qu'elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une réciproque, qui est une également une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, et que l'on note

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

On l'appelle *fonction racine carrée.*

On sait alors que son graphe est le symétrique du graphe de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$.



Dérivée de la fonction racine carrée. Une conséquence du théorème de dérivation de la réciproque, que nous rencontrerons plus tard, est que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que sa dérivée est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La formule de dérivation composée donne alors que pour toute fonction f dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et à valeurs strictement positives, la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et sa dérivée est donnée par

$$x \mapsto \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Exemple. Donner le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \sqrt{3x^2+2}$, et calculer sa dérivée sur ce domaine.

Python.

La fonction racine se trouve dans la librairie `numpy` et se nomme `sqrt` :

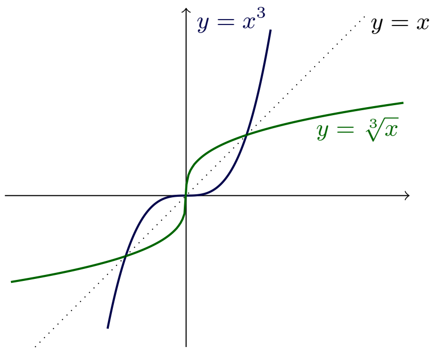
```
import numpy as np
np.sqrt(2)
```

Racine cubique

Comme $f : x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, par le théorème de la bijection.
Ainsi, f admet donc une réciproque, bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note cette réciproque

$$x \;\mapsto\; \sqrt[3]{x}.$$

et on l'appelle *fonction racine cubique.*



Racine n-ième

On peut généraliser cette construction à tous les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$, en distinguant suivant les cas où n est pair ou impair..

Proposition - Racine n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

i. Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

ii. Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction réciproque est la fonction racine n-ième, notée $\sqrt[n]{\cdot}$.

Elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\star$ Si n est pair, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[n]{x^n} = x$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.
- $\star$ Si n est impair, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

4. Fonctions exponentielle et logarithme népérien

a. Fonction logarithme népérien

Définition - Logarithme népérien

On définit la fonction logarithme népérien, notée ln sur $\mathbb{R}_+^\star$, par

$$\ln x \;=\; \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Ainsi définie, la fonction ln est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui vaut 0 en 1 (nous montrerons ce résultat dans le chapitre *Intégration*). On en déduit les deux propriétés suivantes.

1. La dérivée de ln sur $\mathbb{R}_+^\star$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Proposition - Propriété fondamentale du logarithme népérien

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(xy) \;=\; \ln x + \ln y$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$. Nous allons montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\ln(xy) - \ln x - \ln y = 0$. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(xy) - \ln x - \ln y$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Il s'agit donc de montrer que φ est la fonction nulle. On observe que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\varphi'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Comme par ailleurs $\varphi(1) = 0$, on a bien montré que φ est la fonction nulle. Par conséquent, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. □

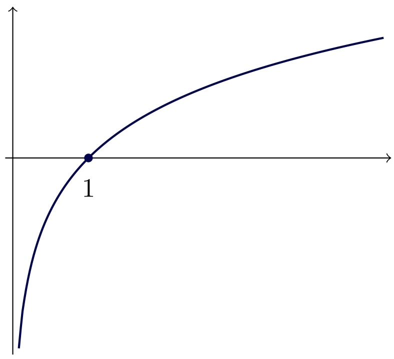
Propriétés - Propriétés de ln

- Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
- Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
- Si $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

Ces propriétés découlent de la propriété fondamentale de ln. Elles permettent en particulier de déterminer les limites de la fonction ln en 0 et en $+\infty$ (qui se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre).

Limites de la fonction ln.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$



Graphe de la fonction logarithme népérien

Démonstration. D'après les propriétés de la fonction ln, on a $\ln(2^n) = n\ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par stricte croissance de la fonction ln, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$, donc $n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit alors que $\ln(2^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi, la fonction ln est non majorée. Comme elle est croissante, on sait alors que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par ailleurs, comme $\frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent, $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$. □

b. Fonction exponentielle

Nous avons vu que la fonction logarithme népérien est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur son image $f(\mathbb{R}_+^\star)$, qui est $\mathbb{R}$ tout entier d'après les limites de ln en 0 et en $+\infty$. La fonction ln est donc bijective de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème - Définition de la fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle, notée exp, comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Il s'agit donc d'une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, et on a alors

$$\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque. On a $\exp(0) = \exp(\ln 1) = 1$.

Proposition - Propriété fondamentale de l'exponentielle

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$. Comme la fonction ln est la réciproque de la fonction exp, on a alors $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. □

Remarque. Une conséquence de cette propriété est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp(n) = \exp(1 + \ldots + 1) = \exp(1)^n.$$

On note $\mathrm{e} = \exp(1)$, de sorte qu'on écrit finalement $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

Notation. On introduit la *notation* suivante, qui trouve sa justification dans la remarque précédente. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\exp(x) \;=\; \mathrm{e}^x.$$

On déduit de la propriété fondamentale de l'exponentielle que les règles de la puissance s'appliquent : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{e}^{xy} \;=\; (\mathrm{e}^x)^y, \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Par ailleurs, les limites de la fonction exponentielle peuvent être déduites directement des limites de la fonction logarithme népérien.

Limites de la fonction exp.

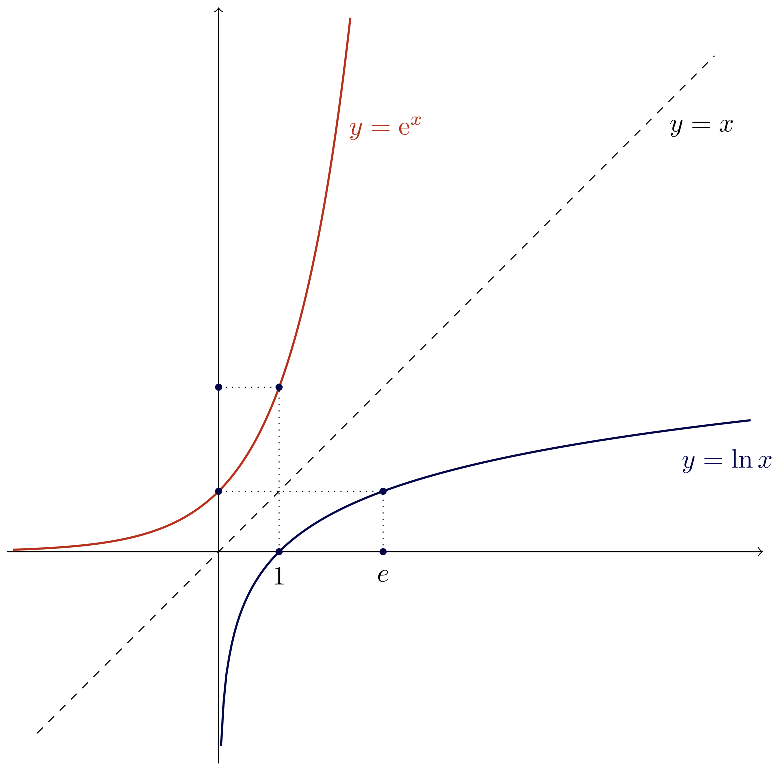
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \;=\; 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \;=\; +\infty.$$

Le théorème de la bijection fournit en fait un moyen de calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction bijective, si la dérivée de cette dernière ne s'annule pas. On montre par ce procédé que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est

$$\exp' \;=\; \exp\,.$$

Par conséquent, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Par dérivation composée, si f est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$, alors $x \mapsto \exp\big(f(x)\big)$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et sa dérivée est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par $x \mapsto f'(x)\exp\big(f(x)\big)$.



Python.

La fonction exponentielle se trouve dans la librairie `numpy` et s'utilise avec l'import `import numpy as np` et la commande `np.exp`.

c. Fonctions puissances réelles

Si $x \in \mathbb{R}+^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, on sait que
$$x^n = \mathrm{e}^{\ln(x^n)} = \mathrm{e}^{n\ln x}.$$
Ceci est d'ailleurs valable plus généralement pour $n \in \mathbb{Z}$. Nous allons généraliser cette écriture au cas où l'exposant n'est plus entier.

Notation. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on *note* :
$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$
On remarque qu'on a alors $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

Il convient de bien se souvenir qu'il s'agit d'une *notation*. On veillera donc bien à travailler avec l'écriture exponentielle lors de la manipulation d'expressions de la forme x^α.

La proposition ci-dessous montre que les règles de calcul sur les puissances sont conservées dans ce cadre plus général. La vérification de chaque point repose directement sur la définition de x^α, et est laissée en exercice.

Proposition - Généralisation des règles de calcul sur les puissances

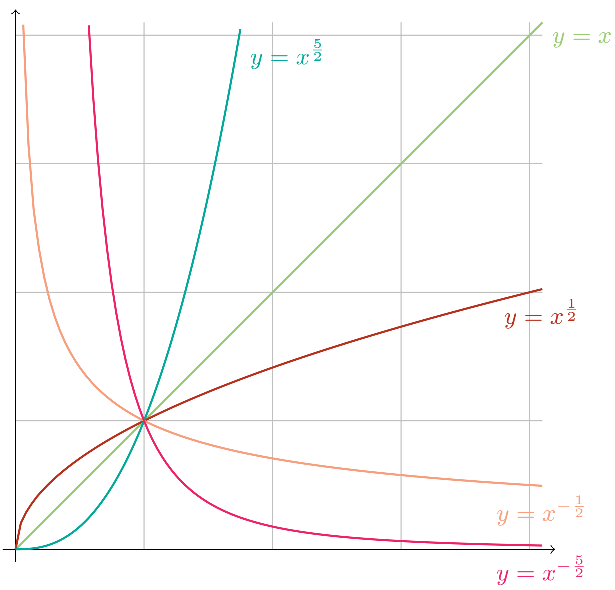
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Définition - Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance α sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)} \end{array}$$

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Par conséquent,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

⚠ D'après ce qui précède, les fonctions $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ et $\sqrt[n]{\cdot}$ coïncident sur $\mathbb{R}_+^\star$, mais il faut bien noter qu'elles ne sont pas définies sur les mêmes ensembles : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^\star$, alors que $\sqrt[n]{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair, et sur $\mathbb{R}$ entier si n est impair.



Proposition - Dérivée des fonctions puissances réelles

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Les limites suivantes sont connues sous le nom de croissances comparées, nous les admettons pour le moment.

Proposition - Croissances comparées

i. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

ii. Pour tout $\beta > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta \ln x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0.$$

5. Fonctions trigonométriques

a. Fonctions cosinus et sinus

Rappel.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note M_θ l'unique point du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré en O) tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta\ [2\pi]$. On note alors

$$\begin{aligned} \cos\theta &: \text{ l'abscisse de } M_\theta, \\ \sin\theta &: \text{ l'ordonnée de } M_\theta. \end{aligned}$$

On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ les fonction sinus et cosinus par respectivement $\theta \mapsto \sin\theta$ et $\theta \mapsto \cos\theta$.

Les valeurs suivantes sont à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Proposition - Propriétés des fonctions sinus et cosinus

i. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

ii. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

iii. La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

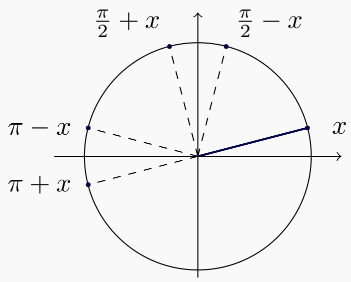
iv. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Les propriétés suivantes sont à savoir retrouver à partir du cercle trigonométrique.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x, \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x, & \sin(\pi - x) &= \sin(x), \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x. \end{aligned}$$



Remarque. Pour résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$, ou $\sin x = \sin a$, on fait appel aux considérations de la proposition ci-dessus, que l'on retrouve facilement sur un cercle trigonométrique.

Résolution d'équation du type $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$.
Si $a \in \mathbb{R}$, alors pour tous $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x = \cos a \quad &\text{ssi} \quad x = a\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x = -a\ [2\pi], \\ \sin x = \sin y \quad &\text{ssi} \quad x = a\ [2\pi] \ \text{ ou } \ x = \pi - a\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Ces équations sont parfois écrites sous la forme $\cos x = \alpha$, ou $\sin x = \alpha$. On commence alors par essayer d'écrire α sous la forme $\cos a$ ou $\sin a$.

Exemple. Résolution de l'équation $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.

Solution. On sait que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, l'équation se récrit $\sin(2x) = \sin \frac{\pi}{3}$, et x est solution ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ceci se récrit : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
Cherchons alors toutes les solutions dans $[0, 2\pi]$: en choisissant $k = 0$ ou $k = 1$, on obtient les solutions $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$. Comme les autres choix de k donnent des valeurs en dehors de $[0, 2\pi]$, les quatre valeurs ci-dessus sont les seules solutions.

Les formules trigonométriques ci-dessous sont à connaître.

Proposition - Formules trigonométriques

Soient a, b deux réels.

i. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
ii. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
iii. On en déduit les formules dites de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a), \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

Le première s'écrit aussi $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

Exercice 6.
1. Déterminer la valeur de $\cos \dfrac{3\pi}{4}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{6}$.
2. Calculer $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Remarques.

– La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos\big([0, \pi]\big) = [-1, 1]$.

– La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

Une limite à connaître. On a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

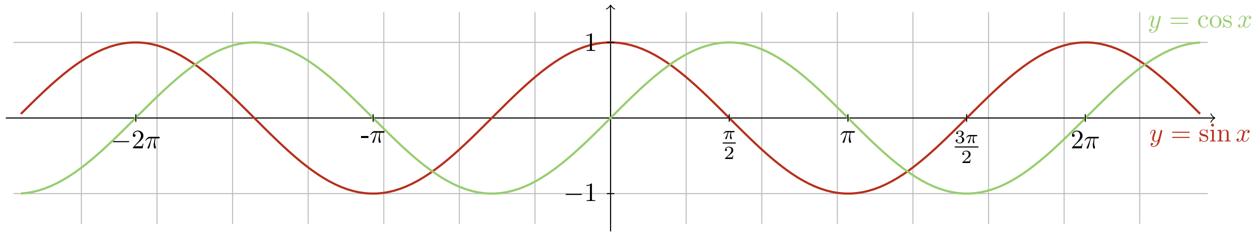
Proposition - Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Voir le chapitre *Dérivation*. □

Graphe des fonctions cosinus et sinus



b. Etude de la fonction tangente

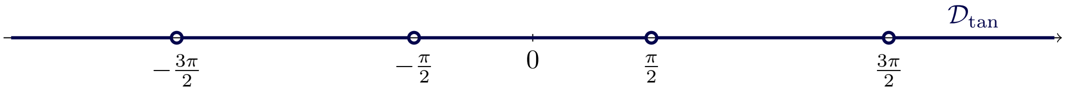
Définition - Fonction tangente

La fonction tangente est la fonction définie par $\tan : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Ensemble de définition

Si $x \in \mathbb{R}$, le réel $\tan x$ est bien défini si et seulement si $\cos x \neq 0$. Le domaine de définition de tan est alors

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



On remarque qu'alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \mathcal{D}_{\tan}$ si et seulement si $x + \pi \in \mathcal{D}_{\tan}$.

Domaine d'étude

On remarque d'emblée que la fonction tan est 2π-périodique. En fait, elle est même π-périodique : en effet, si $x \in \mathcal{D}_{\tan}$, alors

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

On peut donc restreindre l'étude de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le reste du graphe de tan se déduira par périodicité.

On remarque par ailleurs que la fonction tangente est *impaire* : en effet, pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

On peut donc finalement restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$. Le graphe de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ se déduira par symétrie par rapport à l'origine.

Limites aux bornes

Calculons les limites aux bornes de l'intervalle d'étude $[0, \frac{\pi}{2}[$:

- On a $\tan 0 = 0$.
- On a $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$.

Variations

Comme sin et cos sont dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et cos ne s'annule pas sur cet intervalle, la fonction tan est dérivable également sur l'intervalle. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

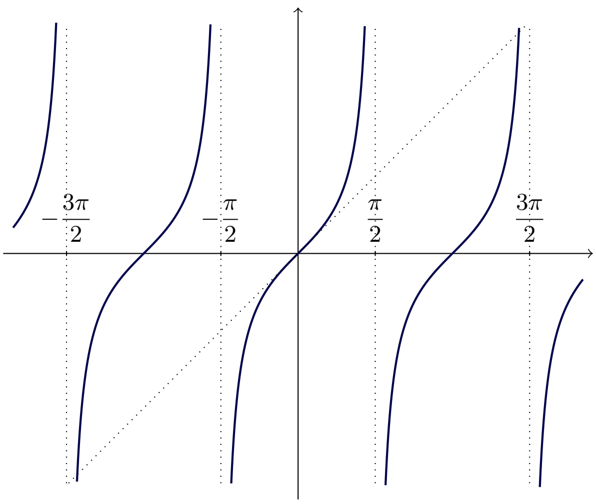
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{ou encore} \quad \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Dérivée de tan. On retiendra que tan est dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$, et pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Comme $\tan'$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que tan est strictement croissante sur cet intervalle. On peut maintenant tracer le graphe de tan sur tout $\mathcal{D}_{\tan}$.

Graphe



Propriétés

Récapitulons.

i. tan est définie sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

ii. Elle est impaire et π-périodique.

iii. Elle est dérivable sur $\mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

iv. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = +\infty$

v. $\tan(0) = 0$, $\tan'(0) = 1$.

vi. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

c. Fonction arctangente

La fonction tangente est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement croissante sur cet intervalle. On a vu

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = +\infty$$

Par le théorème de la bijection, la fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition - Fonction arctangente

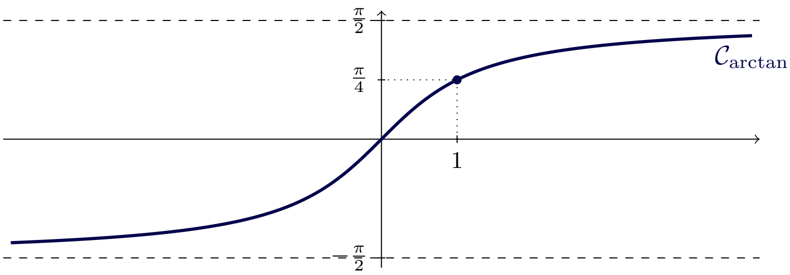
La fonction arctangente, notée arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque. Pour tout réel x,
- ⋆ $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
- ⋆ $\tan(\arctan x) = x$.

Proposition - Dérivée de la fonction arctangente, admise pour le moment.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Représentation graphique.



Valeurs particulières et limites.
- ⋄ $\arctan 0 = 0$,
- ⋄ $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,
- ⋄ $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$,
- ⋄ $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$,
- ⋄ $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.