Chapitre 4

Sommes et produits

I Généralités sur les sommes

1. Le symbole $\sum$

On rappelle que la notation $[\![n, m]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre les entiers n et m.

Notation - Somme

- Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, on note la somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \text{ ou encore } \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i.$$

Plus généralement, si p est un entier avec $p \leqslant n$, on note $\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$.

- Si I est une partie finie de $\mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels indexée par I, la somme des éléments de cette famille est notée $\sum_{i \in I} a_i$.

Remarque. Par convention, la somme vide est nulle : $\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0$.

Exemples.

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$.
- $1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 15^2 = \sum_{k=1}^{7} (2k+1)^2$.
- Si $q \in \mathbb{R}$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.
- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{99}{100} = \sum_{k=1}^{99} \frac{k}{k+1}$.
- $2 + 4 + 6 + \cdots + 48 = \sum_{k=1}^{24} 2k$.
- $2 + 7 + 11 = \sum_{i \in \{2,7,11\}} i$.

Remarques.

- Pour $I = [\![1, n]\!]$, on a $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.
- L'indice i dans les sommes ou les produits est muet : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Nombre de termes. Si p et n sont deux entiers avec $p \leqslant n$, et $a_p, \ldots, a_n$ sont des réels, alors

$$\text{la somme } \sum_{k=p}^{n} a_k \text{ contient } n - p + 1 \text{ termes.}$$

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=p}^{n} a = a + \ldots + a = (n - p + 1)a$.

2. Règles de calcul

Les règles de calcul suivantes proviennent directement des propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$, et pourront être bien comprises en écrivant les sommes sous leur forme "étendue" : $\sum_{i=1}^{n} = a_1 + \ldots + a_n$.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Exemple. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k-2) \;=\; 2\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right).$

Remarque. Ces règles de calculs restent vraies pour des indices dans un ensemble fini I quelconque.

⚠ On ne peut pas simplifier l'expression $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Proposition - Relation de Chasles

Si p et n sont des entiers avec $p \leqslant n$ et $a_p, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors pour tout $m \in [\![p, n]\!]$,

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

Exemple. En particulier, si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on peut écrire $\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k \;=\; \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$.

Remarque. Plus généralement, si I et J sont deux sous-ensembles finis et disjoints de $\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i.$$

Exercice 1. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{10} \min(5, k)$.

Proposition - Inégalité triangulaire généralisée

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence, elle est laissée en exercice. □

3. Changement d'indice et télescopage

Une somme peut être écrite de différentes manières selon le choix de l'indice. On peut passer d'une écriture à une autre en changeant d'indice, on dit qu'on fait une réindexation de la somme.

Exemples.
- ◇ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \;=\; a_1 + \ldots + a_{n+1} \;=\; \sum_{j=1}^{n+1} a_j$: on a fait le changement d'indice $j = i+1$.
- ◇ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \;=\; a_1 + \ldots + a_n \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$: on a fait le changement d'indice $j = n - i$.

Remarque. On prendra l'habitude de faire les vérifications suivantes à chaque changement d'indice.

– Le nombre de terme de la somme ne change pas.
– Les termes de chacune des sommes sont les mêmes. On pourra examiner le premier et le dernier terme à des fins de vérifications.

On retiendra qu'on ne peut effectuer des changements d'indice que du type $j = i + m$ ou $j = m - i$. C'est-à-dire que dans l'écriture du changement d'indice, le coefficient devant l'indice de sommation est soit 1 soit -1.

Exemples. 1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n+i} = \sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{k}$. 2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sqrt{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}$.

Méthode - Sommes télescopiques

Si $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$ et $a_p, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_p.$$

Démonstration. ♥ On a

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=p}^{n}a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n}a_k = \sum_{i=p+1}^{n+1}a_i - \sum_{k=p}^{n}a_k,$$

par changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme. Ainsi,

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{i=p+1}^{n+1}a_i - \sum_{k=p}^{n}a_k = \left(\sum_{i=p+1}^{n}a_i + a_{n+1}\right) - \left(a_p + \sum_{k=p+1}^{n}a_k\right) = a_{n+1}-a_p,$$

car $\sum_{i=p+1}^{n}a_i = \sum_{k=p+1}^{n}a_k$ (la variable est muette). □

Remarque. Le procédé de la démonstration est à connaître par cœur. Il faut savoir le refaire, et l'adapter si besoin.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. Calculer S_n.

On commence par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi, par télescopage,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

II Sommes classiques

Proposition - Somme des n premiers entiers, carrés et cubes

Soit n un entier naturel non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Démonstration. Ces trois formules peuvent se démontrer par récurrence. Ces démonstrations sont laissées en exercice, et doivent être maîtrisées parfaitement. □

Exemple. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}.$$

Proposition - Somme des termes d'une suite arithmétique

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\,\frac{u_0+u_n}{2}, \quad \text{et plus généralement} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\,\frac{u_p+u_n}{2}.$$

Démonstration. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)\,r$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_p + (k-p)r = \sum_{k=p}^{n} u_p + r\sum_{k=p}^{n}(k-p) &= (n-p+1)u_p + r\,\frac{(n-p+1)(n-p)}{2}\\ &= (n-p+1)\,\frac{u_p+u_p+(n-p)\,r}{2}\\ &= (n-p+1)\,\frac{u_p+u_n}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

Proposition - Sommes géométriques

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, avec $p \leqslant n$ et $q \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases} \quad \text{et plus généralement} \quad \sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q=1 \\ q^p\,\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Démonstration. ♥ Si $q=1$, comme on l'a vu, la somme est égale au nombre de ses termes.
Si $q \neq 1$, on a

$$(1-q)\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{k=p}^{n}(q^k - q^{k+1}) = q^p - q^{n+1},$$

par télescopage. On a donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p\,\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$. $\square$

Remarques.
- Ces formules sont à connaître par cœur.
- Lorsque $q > 1$, on écrira souvent $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ au lieu de $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemples. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 3^i = 3\,\frac{3^n-1}{3-1} = \frac{3}{2}\,(3^n-1)$, $\quad\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercice 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} \big(2\cos(k) + \sin(k^2)\big)3^{-k-1}\right| \leqslant \frac{3}{2}$.

Proposition - Formule de Bernoulli

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

Démonstration. ♥ Nous avons déjà écrit la démonstration de ce résultat sans le symbole $\sum$. Écrivons-la plus précisément : on a

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \underbrace{b^{n-1-k}}_{=b^{n-(k+1)}} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right) \\ &= a^n b^0 - a^0 b^n\end{aligned}$$

par télescopage. Ainsi, $(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n - b^n$, ce qui donne le résultat. □

Remarque. Le cas $a = 1$ s'écrit $1 - b^n = (1-b)\sum\limits_{k=0}^{n} b^k$: on retrouve le résultat sur les sommes géométriques.

III Sommes doubles

Il arrive qu'on souhaite sommer des éléments qui dépendent de deux indices différents. On parle alors de sommes doubles.

Donnons tout de suite un exemple : si on multiplie les sommes $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ et $\sum\limits_{j=1}^{p} b_j$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_p) = \begin{array}{ll} & a_1 b_1 + \ldots + a_1 b_p \\ + & a_2 b_1 + \ldots + a_2 b_p \\ + & \ldots \\ + & a_n b_1 + \ldots + a_n b_p. \end{array}$$

On somme donc tous les termes $a_i b_j$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$. Cette somme est notée $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j$.

1. Sommes rectangulaires

On parle de somme double *rectangulaire* quand on somme tous les termes d'un tableau à double entrée, dont le coefficient situé à la ligne i et colonne j est noté $a_{i,j}$. Lorsque le tableau a autant de lignes que de colones, on parle de somme *carrée*.

$i \setminus j$	1	2	$\ldots$	p	
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\ldots$	$a_{1,p}$	$\longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1,j}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\ldots$	$a_{2,p}$	$\longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\ldots$	$a_{n,p}$	$\longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{p} a_{n,j}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\ldots$	$\downarrow$	
	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,2}$	$\ldots$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,p}$	

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

La somme obtenue est notée $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n\\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}$, ou $\sum\limits_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{i,j}$. Si la somme est carrée, on la note $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}$.

On constate que la somme peut être effectuée en sommant d'abord chacune des lignes, puis en sommant le tout, ou en sommant d'abord chacune des colonnes, puis en sommant le tout. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition - Permutation des sommes rectangulaires

On a
$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque. Pour calculer une double somme on l'écrit comme deux sommes simples successives, et l'ordre n'a pas d'importance.

Exemples. 1. Si on veut calculer la somme des nombres $i\times j$ lorsque $(i,j)\in [\![1,n]\!]$, on écrit :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Calcul de la somme $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$:
$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\underbrace{\min(i,j)}_{=j} + \sum_{j=i+1}^{n}\underbrace{\min(i,j)}_{=i}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(n+\frac{1}{2})\,i - \frac{i^2}{2} = (n+\frac{1}{2})\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&= (n+\frac{1}{2})\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer la somme $S = \sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} 2^{2i-j}$.

2. Sommes triangulaires

On parle de sommes doubles *triangulaires* lorsqu'on souhaite sommer tous les coefficients $a_{i,j}$ d'un tableau carré à double entrée, tels que $i\leqslant j$, ou $i<j$.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
i\setminus j & 1 & 2 & \dots & p & \\
\hline
1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\
2 & & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \longrightarrow \sum_{j=2}^{n} a_{2,j} \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \qquad\vdots \\
n & & & & a_{n,n} & \longrightarrow \sum_{j=n}^{n} a_{n,j} \\
\hline
 & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \\
 & \sum_{i=1}^{1} a_{i,1} & \sum_{i=1}^{2} a_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} & \Big\} \to \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}
\end{array}
\qquad \longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

La somme obtenue est notée $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$. Dans le cas où il n'y a pas de coefficients sur la diagonale, on note $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}$.

Comme dans le cas précédent, on peut sommer chaque ligne, puis sommer le tout, ou encore sommer chaque colonne, puis sommer le tout. On obtient les règles de permutations de la proposition suivante.

Proposition - Permutation des sommes triangulaires

On a :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right), \qquad \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right).$$

Remarque. Dans la pratique, on choisira l'ordre de sommation pour simplifier les calculs, en prenant bien garde aux bornes dans les sommes.

Exemple. Calcul de la somme $S_n = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

D'après les règles de permutation, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}\right), \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right).$$

La somme $\sum\limits_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$ n'étant pas une somme qu'on sait calculer, on choisit la deuxième version. On a

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1 = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}n.$$

Ainsi, $S_n = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$.

IV Produits

On utilise une notation analogue à celle des sommes pour les produits.

Notation - Produit

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, on note le produit $a_1 a_2 \ldots a_n$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i, \text{ ou encore } \prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_i.$$

Remarques.

- Comme pour les sommes, on aura aussi parfois recours à la notation $\prod\limits_{i\in I} a_i$.
- Par convention, le produit vide vaut 1 : $\prod\limits_{i\in\varnothing} a_i = 1$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et les entiers p, n vérifient $p \leqslant n$, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} a = a^{n-p+1}$.
- On a toujours la relation de Chasles : si $m \in [\![1, n]\!]$, on a $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = \prod\limits_{i=1}^{m} a_i \times \prod\limits_{i=m+1}^{n} a_i$.
- Les changements d'indices se font de la même manière que pour les sommes.

Factorielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Ainsi, si $n \geqslant 1$, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, et $0! = 1$.

Proposition - Règles de calcul

Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels, alors

$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right), \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \quad \text{si } b_1, \ldots, b_n \neq 0.$$

En particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$.

⚠ On ne peut pas simplifier l'expression $\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.

Méthode - Produits télescopiques

Si $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ et $a_p, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^\star$, alors

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Démonstration. ♥ On a

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{i=p}^{n} a_{k+1}}{\prod_{i=p}^{n} a_k} \overset{j=i+1}{=} \frac{\prod_{j=p+1}^{n+1} a_j}{\prod_{i=p}^{n} a_k} = \frac{\left(\prod_{j=p+1}^{n} a_j\right) a_{n+1}}{a_p \prod_{k=p+1}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p},$$

car $\prod_{j=p+1}^{n} a_j = \prod_{k=p+1}^{n} a_k$. □

Remarque. Comme pour les sommes, le procédé de la démonstration est à savoir refaire et adapter si besoin.

Exemple. Calcul de $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2k}$.

On a $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{k+1}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2^n} \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{2^n}$.