Chapitre 5

Calcul matriciel

I Matrices rectangulaires

1. Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Définition - Matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$.

i. On appelle matrice de taille $n \times p$ tout tableau A à n lignes et p colonnes dont les éléments sont des réels $a_{i,j}$ où $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On note la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}.$$

Par défaut, si leur notation n'est pas précisée, les coefficients d'une matrice A sont notés $A_{i,j}$ ou $a_{i,j}$.

ii. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

Remarques.

- *Cas* $n = 1$: $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices lignes* ou vecteurs lignes, de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$.
- *Cas* $p = 1$: $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des *matrices colonnes* ou vecteurs colonnes, de la forme $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
- *Cas* $n = p$: on parle de *matrice carrée*. On écrit simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- *Cas* $n = p = 1$: les matrices de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ n'ont qu'un seul coefficient. On identifie donc $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. On a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. La *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$ ou encore simplement 0 est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
3. On appelle *matrice identité* de taille n la matrice carrée :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Opérations sur les matrices

a. Somme et multiplication par un scalaire

Définition - Somme et produit par un scalaire.

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\star$ On définit la matrice $A + B$ comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!].$$

⋆ On définit la matrice λA comme la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par

$$(\lambda A)_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}, \quad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!].$$

Remarque. La matrice $A+B$ est obtenue en additionnant les coefficients de A et ceux de B, et la matrice λA est obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ. On dit qu'il s'agit d'opérations "coefficient par coefficient".

⚠ Il est indispensable que les matrices A et B soient de la même taille pour pouvoir en faire la somme.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $2B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Les propriétés ci-dessous découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Leur démonstration est directe, et laissée en exercice.

Proposition - Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

- $(A+B)+C = A+(B+C)$,
- $A+B = B+A$,
- $A + 0_{n,p} = A$,
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- $1A = A$,
- $\lambda A = 0_{n,p} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } A = 0_{n,p})$,
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Définition - Matrices élémentaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$. Si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on introduit la matrice $E_{ij} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.
Les matrices E_{ij} sont appelés les *matrices élémentaires* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $A = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{13} + 4E_{21} + 5E_{22} + 6E_{23}$.

Remarque. De manière générale, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on a $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$, et cette écriture est unique.

b. Produit matriciel

Définition - Produit matriciel

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit le *produit* AB comme la matrice de taille $n \times q$ et de coefficients $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ donnés par la formule

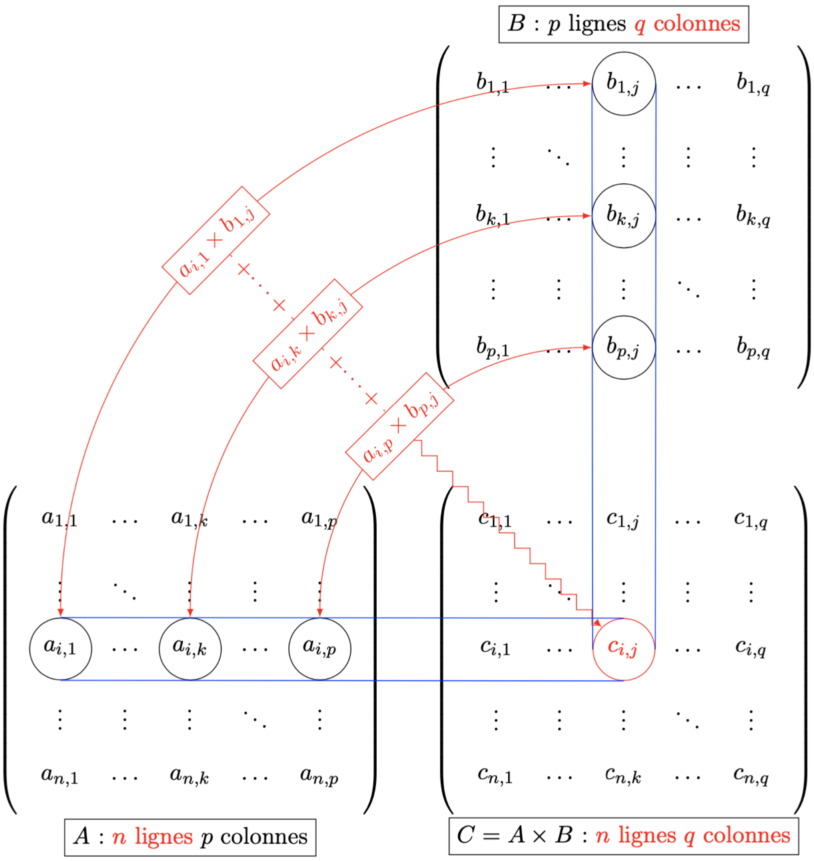
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}.$$

Remarques.

– Pour pouvoir définir le produit AB, il faut donc que *le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B*. Il peut donc arriver que le produit AB soit bien défini, mais pas le produit BA.

– Lorsque A et B sont deux matrices carrées de même taille, le produit AB est bien défini et le produit BA aussi.

Le schéma ci-dessous représente la manière de comprendre le calcul du produit de deux matrices. Il sera utile dans un premier temps de présenter les deux matrices de cette manière pour faire le calcul de leur produit.



Exemples. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB, BA, CA et BC.

On a $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $BC = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

⚠ Attention, *le produit matriciel ne se comporte pas du tout comme le produit de nombres réels.*

- Le produit matriciel n'est pas commutatif : même lorsque les deux matrices existent et ont même taille, en général,

$$\boxed{AB \neq BA}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

- Par conséquent, de nombreuses manipulations usuelles sur les réels sont fausses sur les matrices. Par exemple, si A et B sont des matrices carrées,
  - ⋆ $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, mais en général $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
  - ⋆ $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$, mais en général $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$.

- Par ailleurs,

$$\boxed{AB = 0 \quad \text{n'implique pas} \quad (A = 0 \text{ ou } B = 0)}.$$

Autrement dit, deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une conséquence importante est que même lorsque A est non nulle,

$$\boxed{AB = AC \quad \text{n'implique pas} \quad B = C.}$$

– On ne divise *jamais* par une matrice, une telle opération n'a jamais de sens.

Proposition - Propriétés du produit matriciel

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a

- $\diamond$ $AI_p = A$, et $I_n A = A$,
- $\diamond$ $A\,0_{p,q} = 0_{n,q}$, et $0_{r,n}\,A = 0_{r,p}$.

Soient A, B et C trois matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsque les opérations effectuées sont licites, on a

- $\diamond$ $(A+B)\,C = AC + BC$,
- $\diamond$ $A\,(\lambda B) = (\lambda A)\,B = \lambda\,AB$.
- $\diamond$ $A\,(B+C) = AB + AC$,
- $\diamond$ $A\,(BC) = (AB)\,C$,

Démonstration. À l'exception de la dernière, toutes ces propriétés découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Vérifions donc $A(BC) = (AB)C$ si ces opérations sont licites, c'est-à-dire si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, pour des entiers p, q, r.
Il s'agit de montrer que pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, $(A(BC)_{i,j} = ((AB)C)_{i,j}$:

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\,(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \sum_{l=1}^{q} b_{k,l}c_{l,j} = \sum_{l=1}^{q} \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,l}}_{=(AB)_{i,l}} c_{l,j} = ((AB)C)_{i,j},$$

d'où le résultat. □

Exemple. Si le produit de deux matrices A et B existe, alors $A\,(2B) = 2\,AB$.

Définition - Matrices commutantes

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $AB = BA$, on dit que A et B *commutent*, ou qu'elles sont *commutantes*.

Remarques.
– Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors A commute avec elle-même.
– Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors A commute avec I_n : $AI_n = I_n A = A$.

Exercice 1. Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Transposée d'une matrice

Définition - Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la *matrice transposée* de A comme la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée ${}^tA$ (ou A^T) telle que si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}.$$

Remarque. La transposition d'une matrice a pour effet de transformer les lignes en colonnes et réciproquement. Lorsque A est carrée, on obtient ${}^tA$ en faisant une symétrie des coefficients de A par rapport à sa diagonale.

Exemple.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 8 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, \text{ et } {}^tB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Si $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a ${}^tE_{i,j} = E_{j,i}$.

Proposition - Propriétés de la transposition

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et λ, μ deux réels, on a :

- ${}^t({}^tA) = A$, *(Involutivité de la transposition)*
- ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$, *(Linéarité de la transposition)*
- ${}^t(AC) = {}^tC\, {}^tA$.

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent directement des définitions, et sont laissées en exercice. Montrons la troisième : d'après la définition de la transposition, on a ${}^t(AC) \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que pour tous $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\left({}^t(AC)\right)_{i,j} = \left({}^tC\, {}^tA\right)_{i,j}$:

$$\left({}^t(AC)\right)_{i,j} = (AC)_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k} c_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tA)_{k,j} ({}^tC)_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{i,k} ({}^tA)_{k,j} = \left({}^tC\, {}^tA\right)_{i,j}. \quad \square$$

II Matrices carrées

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et on se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Matrices diagonales, matrices triangulaires

a. Matrices diagonales

Définition - Matrice diagonale

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *diagonale* si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, tous ses coefficients non diagonaux sont nuls, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
On note parfois $A = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$.

Exemples. I_n et $0_{n,n}$ sont des matrices diagonales de taille n.

Un produit, une somme, de matrices diagonales est encore diagonal. La transposée ou la multiplication par un réel d'une matrice diagonale est encore diagonale. On dit que l'ensemble des matrices diagonales est *stable* par ces opérations. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots \mu_n$ des réels. Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots \mu_n)$, alors

- $A + B = \mathrm{Diag}(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)$,
- $AB = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$,
- $\lambda A = \mathrm{Diag}(\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- ${}^tA = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) = A$.

b. Matrices triangulaires

On appelle matrice triangulaire une matrice dont les coefficients de la partie inférieure ou supérieure sont tous nuls.

Définition - Matrice triangulaire

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

i. On dit que A est *triangulaire supérieure* si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous ses coefficients sous la diagonale sont nuls. Autrement dit,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0.$$

ii. On dit que A est *triangulaire inférieure* si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que tous ses coefficients au-dessus la diagonale sont nuls. Autrement dit,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \ \Rightarrow\ a_{i,j} = 0.$$

Remarques.

- La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure et réciproquement.
- Une matrice diagonale est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.

Proposition - Somme et produit de matrices triangulaires

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures), alors $A+B$ et AB sont aussi triangulaires supérieures (*resp.* inférieures). De plus,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \mu_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ alors } AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ (0) & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Nous montrons le résultat pour des matrices triangulaires supérieures, la preuve du deuxième cas étant analogue. On suppose que A et B sont triangulaires supérieures.

- ⋆ Si $i, j \in [\![1,n]\!]$ et $i > j$, on a $(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = 0$, donc $A+B$ est bien triangulaire supérieure.
- ⋆ Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i > j$. On a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,i} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} = 0,$$

car si $k < i$, alors $a_{i,k} = 0$, et si $k \geqslant i$, alors on a aussi $k > j$, donc $b_{j,k} = 0$. On a donc bien montré que AB est triangulaire supérieure.

Pour voir le dernier point, il suffit de remarquer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,i} + a_{i,i}b_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,i}}_{=0} = \lambda_i\mu_i. \qquad \square$$

2. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition - Matrice symétrique, antisymétrique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- ⋆ On dit que A est *symétrique* si ${}^tA = A$, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}.$$

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- ⋆ On dit que A est *antisymétrique* si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarques.

- Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
- L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) est stable par somme, mais pas par produit.

  Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Montrer par analyse-synthèse que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. Puissances d'une matrice carrée

Définition - Puissances successives d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit par récurrence les *puissances successives* de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall p \in \mathbb{N},\ A^{p+1} = A\,A^p = A^p\,A \end{cases}$$

On a ainsi $A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$.

⚠ Si A n'est pas une matrice carrée on ne *peut pas* définir A^p.

Exercice 4. Calculer A^2 et A^3 où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2, B^3, puis conjecturer une expression de B^n, et la démontrer.

Le résultat suivant découle directement de l'associativité du produit matriciel.

Proposition - Propriétés des puissances de matrices

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a
- ⋄ $A^p \times A^q = A^{p+q}$,
- ⋄ $(A^p)^q = A^{pq}$.

En particulier, A commute avec toutes ses puissances.

Remarques.

- Si A et B sont des matrices carrées et $p \in \mathbb{N}$ on n'a pas en général $(AB)^p = A^p B^p$. On a en effet
$$(AB)^p \;=\; AB\,AB\,\ldots\,AB,$$
ce qui en général est différent de $A^p B^p$ puisque le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Si les matrices A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$, on a par contre $(AB)^p = A^p B^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad \text{et} \quad (A-B)(A+B) = A^2 - B^2,$$
et même la formule plus générale :
$$\heartsuit \quad A^n - B^n \;=\; (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} \quad (\textit{Formule de Bernoulli}).$$

Proposition - Puissance d'une matrice diagonale

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$D^p = \mathrm{Diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p).$$

4. Matrices inversibles

a. Définition

Proposition–Définition - Matrice inversible, inverse d'une matrice

⋆ Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$
Dans ce cas, la matrice B, appelée inverse de A, est unique. On la note A^{-1}. On a ainsi, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

⋆ L'ensemble des matrices inversibles de taille n est notée $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Nous allons montrer que l'inverse est unique. Supposons que A admette deux inverses B et B'. Alors
$$B' \;=\; B'\underbrace{AB}_{=I_n} \;=\; \underbrace{B'A}_{=I_n}B \;=\; B.$$
Ceci montre bien l'unicité de la matrice inverse de A. □

Remarques.
- Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être inversible.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A^{-1} est inversible, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exemples.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc A est inversible, d'inverse B.
2. I_n est inversible : $I_n\,I_n = I_n$.
3. 0_n n'est pas inversible : pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $0_n\,B = B\,0_n = 0_n \neq I_n$.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0_n$, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Supposons que A soit inversible, alors $A^{-1}AB = A^{-1}0_n = 0_n$, et $B = 0_n$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, A n'est pas inversible. □

La proposition suivante que l'on admet pour le moment nous permet de calculer uniquement le produit d'un côté pour vérifier qu'une matrice est inversible.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow A \text{ est inversible à gauche} : \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ BA = I_n \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible à droite} : \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AB = I_n. \end{aligned}$$

La méthode suivante est très utile pour montrer qu'une matrice est inversible, et calculer son inverse facilement.

Méthode - Calcul de l'inverse à l'aide d'une équation polynomiale

Lorsqu'on sait que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie une équation polynomiale :

$$a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n},$$

avec $a_0 \neq 0$, on peut en déduire que A est inversible :

$$-\frac{a_k}{a_0} A^k + \ldots - \frac{a_1}{a_0} A = I_n, \quad \text{donc} \quad A\left(-\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \ldots - \frac{a_1}{a_0} I_n\right) = I_n.$$

Ceci montre que A est inversible, et $A^{-1} = -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} + \ldots - \frac{a_1}{a_0} I_n$.

Exemples.

- Si on sait que $A^2 + A - I_n = 0_n$, alors on peut écrire :

  $$A^2 + A = I_n, \quad \text{donc} \quad A(A + I_n) = I_n.$$

  Ceci montre que A est inversible, et que son inverse est donnée par $A^{-1} = A + I_n$.
- Si on a $A^3 - 3A = 2I_n$, alors $A(A^2 - 3I_n) = 2I_n$, puis $A\left(\frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)\right) = I_n$, donc A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = -A^2 + 3A - 3I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

b. Inverse et opérations

Proposition - Opérations sur les matrices inversibles

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices inversibles. Alors

- si $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible, et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$. Dans ce cas, on note $(A^{-1})^p = A^{-p}$.

Démonstration.
- ◇ On a $(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right) = \lambda\frac{1}{\lambda}AA^{-1} = I_n$, d'où le résultat.
- ◇ On a $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$, d'où le résultat.
- ◇ On a ${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^t\left(AA^{-1}\right) = {}^tI_n = I_n$, d'où le résultat.
- ◇ On sait que A et A^{-1} commutent, donc $\left(A^{-1}\right)^pA^p = \left(A^{-1}A\right)^p = I_n{}^p = I_n$. □

Remarque.
- D'après ce qui précède, l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication, inverse et transposition.
- ⚠ En revanche, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par somme : en général, la somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible. Par exemple, $I_n + (-I_n) = 0_n$, donc $I_n + (-I_n)$ n'est pas inversible !

c. Cas des matrices 2×2

Définition - Déterminant

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit le *déterminant* de A, noté $\det A$ par

$$\det A = ad - bc.$$

Proposition - Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0.$$

Dans le cas où A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Démonstration. On remarque que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$. Par conséquent,

- si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors $A \times \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = I_2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- si $\det A = ad - bc = 0$, alors $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = 0_2$, ce qui implique que A n'est pas inversible. □

Exercice 7. Etudier l'inversibilité et le cas échéant calculer l'inverse des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

d. Cas des matrices diagonales et triangulaires

Proposition - Inversibilité d'une matrice diagonale

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$, et dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

– Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n,$$

d'où A est inversible, et $A^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

– S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$, alors

$$A \times \mathrm{Diag}(0, \dots, 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0) \; = \; \mathrm{Diag}(0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0) \; = \; 0_n.$$

Comme $\mathrm{Diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ est non nulle, ceci entraîne que A n'est pas inversible. □

Exemple. La matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition - Inversibilité d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de A.

Remarque. Cette propriété est admise pour l'instant. Il est à noter qu'il n'y a pas de formule générale pour l'inverse d'une matrice triangulaire.