Chapitre 6

Ensembles et applications

I Ensembles

1. Différentes descriptions d'un ensemble

Un *ensemble* est une collection ou un groupement d'objets, qu'on appelle les *éléments* de l'ensemble.
Notation : si E est un ensemble, on note $x \in E$ si x est un élément de E et $x \notin E$ si x ne l'est pas.

Pour définir un ensemble, on distingue trois manières bien distinctes de procéder.

- ⋆ Définition en *extension* : on énumère tous les éléments de l'ensemble : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On s'autorise aussi parfois à n'écrire que le début de l'énumération des éléments lorsque la suite se comprend implicitement.

  Exemples : $A = \{1, 3, 4, 6, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

- ⋆ Définition en *compréhension* : on sélectionne dans un ensemble plus gros les éléments vérifiant une certaine propriété : $E = \{x \in F,\ \mathcal{P}(x)\}$.

  Exemples : $P = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$.

- ⋆ Définition en *paramétrisation* : on décrit l'ensemble comme ensemble image d'une fonction sur un ensemble A donné : $E = \{f(x),\ x \in A\} = f(A)$.

  Exemples : $P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 1.
- Écrire C en extension.
- Écrire $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ en compréhension, puis en paramétrisation.

Remarques.
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'*ensemble vide* et est noté $\varnothing$.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément x s'appelle un singleton et est noté $\{x\}$.

Rappel. Ensembles de nombres classiques :

- ⋆ les entiers naturels :
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
- ⋆ les entiers relatifs :
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$
- ⋆ les nombres décimaux :
$$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$$
- ⋆ les nombres rationnels :
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right\}$$
- ⋆ les nombres réels :
$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

2. Inclusion, égalité d'ensembles, ensemble des parties d'un ensemble

Définition - Inclusion, ensemble des parties d'un ensemble

Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B, c'est-à-dire
$$\forall x \in A,\ x \in B.$$
Dans ce cas, on note $A \subset B$.

Remarque.
- On dit aussi que A est une *partie* de B, ou encore que A est un *sous-ensemble* de B.
- L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble.
- ⚠ Attention à ne pas confondre appartenance ($\in$) et inclusion ($\subset$).

Exemples.

1. Si $P = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\}$, on a $\{2, 6, 8\} \subset P$, et $P \subset \mathbb{N}$.

2. Inclusions parmi les ensembles de nombres classiques : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Méthode - Montrer une inclusion entre deux ensembles

Pour montrer que $A \subset B$, on écrit : *Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$.*

...

Ainsi, $x \in B$. Par conséquent, on a $A \subset B$.

On aura alors montré que la proposition "$\forall x \in A,\ x \in B$" est vraie, c'est-à-dire $A \subset B$.

Exercice 2. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^4 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}_+$.

Solution. Soit $x \in A$. On sait alors que $x^4 = 4x - 2$ donc $x = \dfrac{1}{4}\left(x^4 + 2\right) \geqslant 0$ car $x^4 \geqslant 0$. D'où $x \geqslant 0$, *i.e.* $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi, $A \subset \mathbb{R}_+$.

Définition - Egalité de deux ensembles

On dit que deux ensembles A et B sont égaux, et on note $A = B$, si tout élément de A appartient à B et réciproquement : $x \in A \iff x \in B$. Autrement dit,

$$A = B \quad \text{si} \quad A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Méthode - Montrer que deux ensembles sont égaux

On montre d'abord que $A \subset B$ puis que $B \subset A$. On dit qu'on procède par double inclusion.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant y\}$.

*Solution.*On note $A = \{x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^\star, x \leqslant y\}$. Montrons que $\mathbb{R}_- = A$.

$\subset$ Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Si $y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $y \geqslant 0 \geqslant x$ donc $x \leqslant y$, et $x \in A$. On a donc $\mathbb{R}_- \subset A$.

$\supset$ Soit $x \in A$, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a $x \leqslant y$. En prenant $y = 0$, on obtient que $x \leqslant 0$, donc $x \in \mathbb{R}_-$. On a donc montré que $A \subset \mathbb{R}_-$.

Finalement, on a montré par double inclusion que $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y\}$.

Définition - Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'*ensemble des parties de* E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E :

$$\mathcal{P}(E) = \{A,\ A \subset E\}.$$

Ainsi, $A \in \mathcal{P}(E)$ si et seulement si $A \subset E$.

Exemples.

1. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
2. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Remarques.

– L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

– (*Hors-programme*) : on peut démontrer qu'il n'existe pas d'ensemble contenant *tous* les ensembles. Ceci peut se montrer en ayant recours à un argument dit *paradoxe de Russel*, développé ci-dessous.

Si on suppose qu'il existe un ensemble de tous les ensembles, que l'on notera E, et qu'on considère l'ensemble A des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes, en d'autres termes

$$A = \{B \in E,\ B \notin B\},$$

alors on aboutit à une contradiction en se demandant si $A \in A$:

– si $A \in A$, alors d'après la définition de A, on a $A \notin A$, ce qui est impossible,

– si $A \notin A$, alors d'après la définition de A, on a $A \in A$, ce qui est impossible également.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

3. Opérations sur les ensembles

a. Réunion et intersection

Définition - Réunion et intersection

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *réunion* de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E,\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Il s'agit de l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (au sens inclusif). Autrement dit, pour tout x,

$$x \in A \cup B \quad \text{ssi} \quad x \in A \text{ ou } x \in B.$$

- L'*intersection* de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$. Il s'agit de l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B. Autrement dit, pour tout x,

$$x \in A \cap B \ \text{ ssi } \ x \in A \text{ et } x \in B.$$

Remarques.
- Pour tout ensemble A, on a $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
- Si A et B sont deux ensembles, on a $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

Exemple. Si $A =]-1, 3]$ et $B =]0, 7[$, alors $A \cup B =]-1, 7[$ et $A \cap B =]0, 3]$.

Proposition - Propriétés de l'intersection et de la réunion

Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E.

- *Commutativité* : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
- *Associativité* : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Distributivité* : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- *Lien avec l'inclusion* :

$$A \subset B \ \Leftrightarrow \ A \cup B = B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = A.$$

- *Élément neutre* : $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap E = A$.

Démonstration. Nous montrons seulement le lien avec l'inclusion, les autres propriétés étant vérifiées directement. Il s'agit de montrer les implications suivantes :

◇ $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$: Supposons que $A \subset B$. On sait qu'on a toujours $B \subset A \cup B$, donc il s'agit de montrer que $A \cup B \subset B$. Si $x \in A \cup B$, alors :
- soit $x \in A$, ce qui implique que $x \in B$ car $A \subset B$,
- soit $x \in B$.

Dans les deux cas, on a $x \in B$. On a donc bien montré que $A \cup B = B$.

◇ $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$: Supposons que $A \cup B = B$, et montrons que $A \cap B = A$ par double inclusion. On sait déjà que $A \cap B \subset A$, il reste donc à montrer que $A \subset A \cap B$.

Soit $x \in A$, on a alors $x \in A \cup B = B$, donc $x \in B$. Finalement $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. On a donc bien $A \cap B = A$.

◇ $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$: Supposons que $A \cap B = A$, et montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$. On a alors $x \in A = A \cap B$, donc on a aussi $x \in B$. Finalement, on a bien montré que $A \subset B$.

On a montré $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$, ce qui permet de montrer les deux équivalences. □

Remarque. On peut généraliser l'intersection et l'union à un nombre quelconque de sous-ensembles. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on définit

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x,\, \exists i \in I,\, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x,\, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Exemples. 1. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$, 2. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= \mathbb{R}_+$, 3. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Définition - Ensembles disjoints, partition

- On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun. Dans ce cas, on note parfois $A \sqcup B$ au lieu de $A \cup B$.
- Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble $\{A_i,\ i \in I\}$ de parties non vides de E est une *partition* si :
  i. les ensembles A_i sont deux à deux disjoints : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$,
  ii. $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$.

Exemples.

1. Si $A = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$, alors A et B forment une partition de $\mathbb{N}$.
   En effet, $A \cap B = \varnothing$, et $A \cup B = \mathbb{N}$.
2. Si $C_n = [n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les ensembles C_n forment une partition de $\mathbb{R}_+$.

b. Différence, complémentaire

Définition - Différence, complémentaire

- Soient A et B deux ensembles. On définit la *différence de B dans A* comme l'ensemble
$$B \setminus A = \{x \in B,\ x \notin A\}.$$
- Si E est un ensemble et $A \subset E$, on appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble $E \setminus A$. On le note $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. On a donc :
$$\forall x \in E,\ x \in \overline{A} \iff x \notin A.$$

Remarques.

- Si $A \subset E$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de E.
- Si A et B sont deux ensembles, $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.
- Si A et B sont deux ensembles, $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.
  En effet, la contraposée de $x \in A \Rightarrow x \in B$ s'écrit $x \notin B \Rightarrow x \notin A$.
- Si $A \subset E$, alors $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{E} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = E$.

Exemples.

- Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs dans $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers impairs de $\mathbb{Z}$.
- Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle $]-1, 3]$ est l'ensemble $]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[$.

Proposition - Lois de Morgan

Si E est un ensemble et A et B sont deux parties de E, alors
- ⋄ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- ⋄ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 4. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Cet ensemble est appelé *différence symétrique de A et B* et se note $A \Delta B$.

c. Produit cartésien

Définition - Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. On définit le *produit cartésien de E et de F*, noté $E \times F$, comme l'ensemble des couples dont la première composante est un élément de E et la seconde un élément de F, c'est-à-dire
$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\}.$$
Dans le cas où $E = F$, on note E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarques.

– *Généralisation* : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles, on définit le produit cartésien de ces ensembles par

$$A_1 \times \ldots \times A_n \;=\; \{(a_1, \ldots, a_n),\, \forall i \in [\![1, n]\!], a_i \in A_i\}.$$

Un élément $(a_1, \ldots, a_n)$ de $A_1 \times \ldots \times A_n$ est appelé un $n-$uplet.

– ⚠ Un n-uplet et un ensemble à n éléments sont deux objets mathématiques différents.

Par exemple : $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, mais $(1, 2) \neq (2, 1)$.
$\{1, 1, 3\} = \{1, 3\}$, mais $(1, 1, 3) \neq (1, 3)$.

– Dans le cas où tous les ensembles sont les mêmes, on note $A \times \ldots \times A = A^n$.

Remarque. Écrire "$\forall x \in A$, $\forall y \in B \ldots$" est équivalent à écrire "$\forall (x, y) \in A \times B, \ldots$".

II Applications

1. Généralités

$a.$ Définition

Définition - Application

⋆ Une application f est la donnée d'un triplet composé

– d'un ensemble de départ E,
– d'un ensemble d'arrivée F,
– d'un procédé qui à chaque élément x de E associe un unique élément noté $f(x)$ dans F.

On note alors

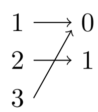
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

⋆ Si $x \in E$, on appelle $f(x)$ *l'image de x par f*. Si $y = f(x)$, on dit que x est un *antécédent de y par f*.

⋆ L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Remarques.

– Dans le cas où E et F sont des ensembles finis, on peut représenter graphiquement une application $f : E \to F$ en liant par une flèche chaque élément de E à son image.
Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{0, 1\}$, et $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 0$, on obtient le graphique ci-contre.



– Montrer qu'un application $f : E \to F$ est *bien définie* consiste à montrer que pour tout $x \in E$, $f(x)$ existe, et appartient à F.

– Une application $f : E \to F$ est une fonction de E dans F définie en tout point de E.

Exemples. Voici des exemples d'applications :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}, \qquad g \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad h \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(R) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array}.$$

Applications particulières. Soit E un ensemble.

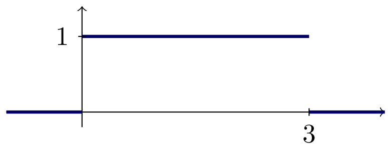
1. *Application identité* : on note Id_E l'application $\mathrm{Id}_E \;:\; \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.

2. *Indicatrice* : soit $A \subset E$. On définit la fonction *indicatrice de* A par

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A & : & E & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Exemples. – Identité de $\mathbb{R}^2$: on a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}((1,2)) = (1,2)$.

– Le graphe de l'indicatrice $\mathbb{1}_{[0,3]}$ est représenté ci-contre.



Définition - Egalité de deux applications

On dit que deux applications f et g sont égales, noté $f = g$, si les ensembles de départ E et d'arrivée F de f et g sont les mêmes et si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Exemples. Considérons

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}, \qquad \begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x^2) \end{array}, \qquad \begin{array}{rccl} h & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 2\ln(x) \end{array}.$$

On a $g = h$ mais on n'a pas $f = h$.

b. Restriction et prolongement

Définition - Restriction, prolongement

Soient E et F deux ensembles et soit $E' \subset E$. Si $f : E \to F$ et $\tilde{f} : E' \to F$ sont deux applications telles que pour tout $x \in E'$, on a $f(x) = \tilde{f}(x)$, on dit que

- ⋆ $\tilde{f}$ est *la restriction* de f à l'ensemble E',
- ⋆ f est *un prolongement* de $\tilde{f}$ à l'ensemble E.

La restriction de f au sous-ensemble E' de E est notée $f_{|E'}$.

Exemples. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$.

- ⋆ $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |2x| \end{array}$ sont des prolongements de f à $\mathbb{R}$.
- ⋆ $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } 2x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$ est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.
- ⋆ $f_4 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$ est la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$.

c. Composition

Définition - Composée de deux applications

Soient E, F et G trois ensembles et f une application de E dans F, g une application de F dans G.
On définit la *composée de* f *par* g, notée $g \circ f$ par

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque. Soit $f : E \to F$. On a $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Exemple. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$. On a $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5. Calculer $g \circ f$ lorsque

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)) \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-1 \end{array}.$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $g(f(x)) = g\left((\cos(x), \sin(x))\right) = \cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Ainsi $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction nulle.

⚠ La composition n'est pas une opération commutative (même si les espaces de départ et d'arrivée peuvent parfois être les mêmes). En revanche, c'est une opération associative.

2. Applications injectives, surjectives, bijectives

a. Injection

Définition - Application injective

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f *est injective* ou *est une injection* si et seulement si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f c'est-à-dire si

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Remarques.

- En écrivant la contraposée de l'implication ci-dessus, on voir que $f : E \to F$ est injective si et seulement si

  $$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y).$$

  Autrement dit, f est injective ssi elle prend pas deux fois la même valeur. On peut aussi reformuler ceci de la manière suivante : pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au plus une solution.
- *Cas d'une fonction réelle.* Si E et F sont des ensembles de $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$ est strictement monotone sur E, alors f est injective.

Méthode - Montrer l'injectivité

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective, on pourra suivre la démarche suivante.

- *Cas où f est une fonction réelle* : on peut chercher à montrer qu'elle est strictement monotone sur E.
- *Cas général* : on fixe x, y dans E, et on montre que si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ *n'est pas* injective, on montrera qu'il existe x, y dans E tels que $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Autrement dit, on aura montré que deux éléments distincts de E ont la même image.

Exemples.

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injexctive : par exemple, on a $f(1) = f(-1)$.
- En revanche, l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est injective.

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Proposition - Composée d'applications injectives

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration. Soient $x, x' \in E$ tels que $g(fx)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g, on a alors $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f, on a alors $x = x'$. Ceci montre que $g \circ f$ est injective sur E. □

b. Surjections

Définition - Application surjective

Soit $f : E \to F$. On dit que f *est surjective* ou *est une surjection* si et seulement si tout élément de F admet *au moins* un antécédent dans E par f c'est-à-dire si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Autrement dit, f est surjective si l'ensemble image de $f(E)$ de f est F tout entier : $f(E) = F$.

Exemples.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ n'est pas surjective, mais $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ l'est.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective, mais $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ l'est.

Remarque.
- Une application $f : E \to F$ est surjective de E dans F si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution.
- L'application $f : E \to f(E)$ est toujours surjective.

Méthode - Montrer qu'une application est surjective

Pour montrer qu'une application f est surjective, on montre que pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution.

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

Proposition - Composée d'applications surjectives

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration. Soit $z \in G$, nous allons montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$, ce qui conclura bien à la surjectivité de $g \circ f$.

Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Par ailleurs, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Finalement, on a bien $g(f(x)) = g(y) = z$, ce qui conclut. □

c. Bijections

Définition - Application bijective

Soit $f : E \to F$. On dit que f *est bijective* ou *est une bijection* si f est injective *et* surjective, autrement dit si tout élément de F admet *un unique* antécédent dans E par f :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y.$$

Exemples. $\star$ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ n'est pas bijective, mais $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est bijective.

$\star$ $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective, mais $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective.

Remarque. Une application $f : E \to F$ est bijective de E sur F si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une unique solution.

Théorème - Application réciproque d'une application bijective

Une application f de E dans F est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que

- $\diamond$ $\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x, \quad$ c'est-à-dire $g \circ f = \mathrm{Id}_E$,
- $\diamond$ $\forall y \in F, \quad f(g(y)) = y, \quad$ c'est-à-dire $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Dans ce cas, g est unique et est appelée *application réciproque* de f. On la note f^{-1}.
Par ailleurs, si f est bijective, alors pour tous $x \in E$ et $y \in F$,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y). \tag{1}$$

Remarque. Si $f : E \to F$ est une bijection, alors f^{-1} est une bijection de F sur E, et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Méthode - Montrer qu'une application est une bijection

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est une bijection, on peut utiliser l'une des stratégies suivantes.

- On peut montrer séparément la surjectivité et l'injectivité.
- On peut résoudre l'équation $y = f(x)$ pour tout $y \in F$ fixé, et montrer qu'elle admet une unique solution dans E. Si c'est le cas, on obtient au passage l'expression de la réciproque :

  d'après (1), la solution vérifie $x = f^{-1}(y)$: on a donc trouvé l'expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y.
- On peut montrer qu'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- On peut, *dans le cas où la fonction est réelle*, utiliser le théorème de la bijection. Il faut bien noter toutefois que cette méthode ne fournit pas l'expression de f^{-1}.

Exemple. Montrons que $f : \begin{array}{ccc} [-2, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$ est bijective.

1ère méthode. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[-2, +\infty[$ sur son ensemble image. Comme $f(-2) = 0$ et $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, son ensemble image est $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, f est bien bijective.

2ème méthode. Soit $y \in \mathbb{R}_+$, nous allons montrer qu'il existe un unique $x \in [-2, +\infty[$ tel que $y = f(x)$: on a

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = \sqrt{x+2} \underset{\text{car } y \geqslant 0}{\Leftrightarrow} y^2 = x + 2 \;\Leftrightarrow\; x = y^2 - 2.$$

Ainsi, on a bien une solution unique dans $[-2, +\infty[$, ce qui donne la bijectivité.
On remarque que cette deuxième méthode donne en plus la bijection réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [-2, +\infty[\\ y & \mapsto & y^2 - 2 \end{array}$.

Exemple. Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}, avec $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$.

On considère un élément (u, v) de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$, et on va montrer que (u, v) admet un unique antécédent (x, y). On a

$$(u, v) = g(x, y) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x = u + v \\ 2y = u - v \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

On a donc bien montré qu'il existe un unique couple (x, y) solution, ce qui prouve que g est bijective. On a par ailleurs

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}$$

Exercice 8. Montrer que $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$ est bijective, et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.

Proposition - Composée d'applications bijectives

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Si f et g sont bijectives, on sait déjà que $g \circ f$ est injective et surjective, donc bijective. Par ailleurs, on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \;=\; f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \;=\; f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f \;=\; f^{-1} \circ f \;=\; \mathrm{Id}_E\,.$$

De même, $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$. On a donc bien montré que $g \circ f$ est inversible, et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

III Un peu de dénombrement

Définition - Ensemble fini

Un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, le nombre n d'éléments de E est appelé cardinal de E, et est noté $\mathrm{Card}\, E$.

Exemple.
- ⋄ $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.
- ⋄ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}(⟦1, n⟧) = n$.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des questions de dénombrements : il s'agit de "compter" les éléments d'un ensemble fini, c'est-à-dire préciser son cardinal.

Commençons par deux observations utiles à cette fin, connues sous le nom de "principe additif" et "principe multiplicatif".

Proposition - Principes additifs et multiplicatifs

- ⋄ Si E et F sont des ensembles disjoints, c'est-à-dire que $E \cap F = \varnothing$, alors

$$\mathrm{Card}(E \cup F) \;=\; \mathrm{Card}\, E + \mathrm{Card}\, F.$$

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont deux à deux disjoints, alors $\mathrm{Card}(E_1 \cup \ldots E_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, E_i$.

- ⋄ Si E et F sont deux ensembles, alors

$$\mathrm{Card}(E \times F) \;=\; \mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, F.$$

Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles, alors $\mathrm{Card}(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, E_i$.

Exemple. Le nombre de n-uplets d'éléments de $\{0, 1\}$, c'est-à-dire le cardinal de $\{0, 1\}^n$ est $\mathrm{Card}(\{0, 1\})^n = 2^n$.

1. Combinaisons, coefficients binomiaux

On cherche à compter les *sous-ensembles* de cardinal k d'un ensemble E. On rappelle que dans la définition d'un ensemble, l'ordre des éléments n'a pas d'importance : $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Exemple. – Lorsqu'on compte les différentes mains de 5 cartes avec un jeu de 52 cartes, l'ordre ne compte pas :

la main $\overset{7}{\heartsuit}\ \overset{8}{\clubsuit}\ \overset{9}{\heartsuit}\ \overset{10}{\spadesuit}\ \overset{V}{\diamondsuit}$ est la même que $\overset{10}{\spadesuit}\ \overset{7}{\heartsuit}\ \overset{9}{\heartsuit}\ \overset{V}{\diamondsuit}\ \overset{8}{\clubsuit}$.

– Lorsqu'on compte les anagrammes du mot *BON*, l'ordre compte : le mot *NOB* n'est pas le même que le mot *BON*.

Définition - Coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments. On l'appelle *coefficient binomial* ou *combinaison*, et on le lit “k parmi n”.

Remarques.

– Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\star$ $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$,

$\star$ $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$.

– On remarque que choisir k éléments parmi n revient à sélectionner les $n-k$ éléments qu'on ne choisit pas. Par conséquent, les coefficients binomiaux présentent la symétrie suivante : si $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{2}$$

On peut voir $\binom{n}{k}$ comme le nombre de tirages possibles de k éléments dans un ensemble à n éléments, effectués *simultanément* : l'ordre ne compte pas.

Exemples.

– Le nombre de mains de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes est $\binom{52}{5}$.

– Le nombre de grilles de loto de 6 numéros choisis dans $[\![1, 49]\!]$ est $\binom{49}{6}$.

Proposition - Formule de Pascal

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration. On propose une démonstration combinatoire. Considérons un ensemble $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ à n éléments. Nous allons compter ses parties à k éléments. Pour ce faire, nous allons scinder cet ensemble de parties en 2 :

- les parties de E à k éléments qui contiennent l'élément x_n, on notera A le nombre de telles parties,
- les parties de E à k éléments qui ne contiennent pas x_n, on notera B le nombre de telles parties.

Comme nous avons alors décrit toutes les parties à k éléments, on a $\binom{n}{k} = A + B$. Ensuite, nous remarquons que

- A correspond au nombre de parties à $k-1$ éléments dans $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, donc $A = \binom{n-1}{k-1}$,
- B correspond au nombre de parties à k éléments dans $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, donc $B = \binom{n-1}{k}$.

Finalement, on a bien montré que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. $\square$

Triangle de Pascal. La formule de Pascal fournit un moyen rapide et pratique de retrouver les coefficients sans avoir à les calculer. On écrit ces coefficients dans un tableau comme ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & k-1 & & k & \\
n-1 & \dots & \binom{n-1}{k-1} & \oplus & \binom{n-1}{k} & \dots \\
 & & & & \downarrow & \\
n & \dots & \dots & & \binom{n}{k} & \dots
\end{array}$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

On écrit d'abord les coefficients $\binom{n}{0}$ et les coefficients $\binom{n}{n}$, dont on sait qu'ils valent tous 1. Les autres coefficients sont alors obtenus en additionnant les coefficients situés au-dessus et à gauche au-dessus. On peut ainsi remplir progressivement le tableau, qu'on appelle triangle de Pascal du fait de sa forme.

Lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$, on peut expliciter le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ de la manière suivante.

Proposition - Expression des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation.* Si $n = 0$, on a $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!\,n!}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on cherche à montrer $\mathcal{P}(n+1)$. Soit un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n+1$. D'après la formule de Pascal, on a

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{k\,n!}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}.\end{aligned}$$

  On a donc bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Finalement, on a bien montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Méthode - Calcul des coefficients binomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$. On remarque que $\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$. Par conséquent, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Cette écriture fournit un moyen souvent pratique pour calculer des coefficients binomiaux. On utilisera la relation (2) pour se ramener d'abord au cas où k est le plus petit possible.

- On a $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$, et $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 30$.
- On a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, et $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Proposition - Formule du capitaine

Si $n, k \in \mathbb{N}^\star$, alors $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. 1. *Preuve combinatoire :* On considère le problème suivant : on compte le nombre N de manières de choisir dans un groupe de n personnes une équipe de k personnes, parmi laquelle on choisit un capitaine. On peut procéder de deux manières différentes.

– On peut choisir d'abord l'équipe de k personnes : il y a alors $\binom{n}{k}$ choix. Pour chaque choix d'équipe, il y a k choix de capitaine. Finalement, on obtient que $N = k\binom{n}{k}$.

– On peut choisir d'abord un capitaine parmi les n personnes : il y a n choix. Pour chaque choix de capitaine, il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix d'équipe : il s'agit de choisir les $k-1$ autres membres de l'équipe dans le groupe de $n-1$ personnes restant. Finalement, on a $N = n\binom{n-1}{k-1}$.

On conclut alors que $k\binom{n}{k} = N = n\binom{n-1}{k-1}$, d'où le résultat.

2. *Autre preuve.* On note d'abord que si $k > n$, alors les deux membres sont nuls, donc l'égalité est vérifiée. Par ailleurs, si $k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1},$$

car $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$. □

Théorème - Formule du binôme de Newton

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Démonstration. Montrons la formule par récurrence sur n.

– *Initialisation.* On a $(a+n)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.

– *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la formule est vraie au rang n. Montrons-la au rang $n+1$: d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= a^0b^{n+1} + a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal. En groupant la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$, ce qui conclut.

On a donc bien montré par récurrence que la formule du binôme de Newton est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exemples.
- ⋄ Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1$.
- ⋄ Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1$.
- ⋄ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$
- ⋄ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$

⚠ Ne pas confondre la formule du binôme de Newton avec la formule de Bernoulli, dans laquelle il n'y a pas de coefficients binomiaux :

$$a^n - b^n \;=\; (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.$$

Remarque. La même preuve que celle de la formule du binôme de Newton donne que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui *commutent*, alors

$$(A+B)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

⚠ La formule devient fausse si les matrices ne commutent pas.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $A = 2I_3 + B$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, on a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 3$.

Comme les matrices B et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton : si $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \;&=\; \binom{n}{0} 2^n B^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} B^2 \\ &=\; 2^n I_3 + n2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2 \\ &=\; 2^n I_3 + n2^{n-1} B + n(n-1)2^{n-3} B^2. \end{aligned}$$

Finalement, si $n \geqslant 2$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n+3)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On remarque que la formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. On cherche à retrouver des calculs effectués dans le chapitre précédent à l'aide de la formule du binôme de Newton.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $M = 3A + I_3$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et en déduire les puissances de M.

Proposition - Nombre de parties d'un ensemble fini

Si E est un ensemble fini de cardinal n alors $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E ayant k éléments. Comme on remarque que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \sqcup \mathcal{P}_1(E) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}_n(E)$, on a

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card} \mathcal{P}_k(E) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

du fait que le nombre de parties de E à k éléments est $\binom{n}{k}$. On en déduit alors que $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$. □

2. Nombre de permutations

Définition - Permutation

Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E une bijection de E dans lui-même.

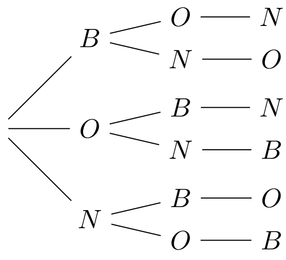
En d'autres termes, une *permutation* d'un ensemble E est une manière de réordonner tous les éléments de E.

Exemple. On cherche à calculer le nombre d'anagrammes du mot BON, c'est-à-dire les mots, même sans signification, formés en réordonnant les lettres B, O et N.

Ceci revient à calculer le nombre de permutations de l'ensemble $\{B, O, N\}$.

Comme le montre l'arbre ci-contre, on obtient

$$3 \times 2 \times 1 = 3! \text{ anagrammes possibles.}$$



> **Proposition - Nombre de permutations**
>
> Soit E un ensemble fini de cardinal n, il y a exactement $n!$ permutations de E.

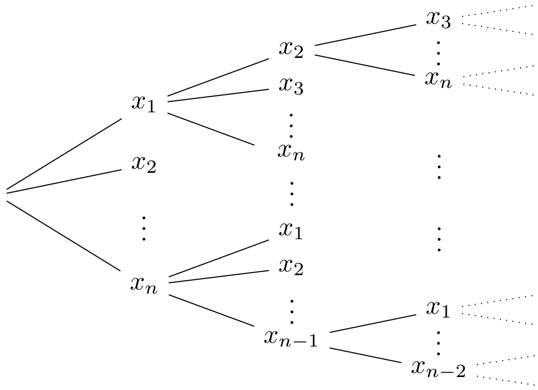
Si E s'écrit

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

il s'agit de compter le nombre de bijections f de E dans E. On remarque d'abord qu'il y a n choix possibles pour $f(x_1)$. Pour chacun de ces choix, il y a $n-1$ choix possibles pour $f(x_2)$, puis $n-3$ choix possibles pour $f(x_3)$, etc.

Finalement, le nombre de permutations obtenu est donné par

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$



3. Nombre de k-uplets

a. k-uplets

Rappel. Un k-uplet d'un ensemble E est un élément de E^k. Il s'agit d'une collection ordonnée $(x_1, \ldots, x_k)$ d'éléments de E.

⚠ Ici, l'ordre compte : $(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_k) \neq (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_k)$. Par ailleurs, un même élément peut figurer plusieurs fois dans le même k-uplet.

On s'intéresse au nombre de k-uplets d'un ensemble E. Il s'agit du nombre de manières de tirer *successivement et avec remise* k éléments parmi n, en tenant compte de l'ordre.

> **Proposition - Nombre de k-uplets**
>
> Soient E un ensemble fini de cardinal n, et $k \in \mathbb{N}^\star$. Le nombre de k-uplets d'éléments de E est n^k. En d'autres termes, $\operatorname{Card} E^k = n^k$.

Démonstration. On a $\operatorname{Card} E^k = \operatorname{Card} E \times \ldots \times \operatorname{Card} E = n^k$. □

Exemple. On lance un premier dé à 6 faces, puis un deuxième, et on note les résultats obtenus. Le nombre de possibilités est donné par $\operatorname{Card}([\![1, 6]\!]^2) = 6^2$.

b. k-uplets d'éléments distincts

On s'intéresse maintenant au nombre de k-uplets *d'éléments distincts* d'un ensemble E (ou *arrangements* de E), c'est-à-dire de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ de E tels que pour tous $i, j \in [\![1, k]\!]$,

$$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

Il s'agit du nombre de manières de tirer *successivement et sans remise* k éléments parmi n, en tenant compte de l'ordre.

Proposition - Nombre d'arrangements

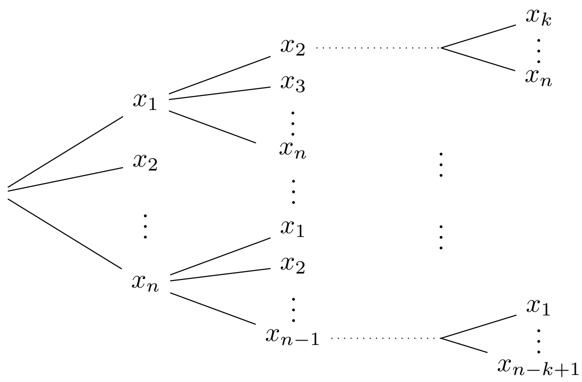
Soient E un ensemble fini de cardinal n et $k \in [\![1, n]\!]$. Le nombre de k-uplets d'éléments distincts de E est donné par

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \; = \; \frac{n!}{(n-k)!}.$$

La situation est analogue à celle des permutations, sauf qu'on s'arrête ici après avoir choisi k éléments. On choisit d'abord le premier élément du k-uplet parmi les n éléments de E. Pour chacun de ces choix, il y a $n-1$ choix pour le deuxième élément, etc. Lorsqu'on arrive au $k^{\text{ème}}$ élément, il y a donc $n-k+1$ choix possibles.

Finalement, le nombre de k-uplets possibles est donné par

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \; = \; \frac{n!}{(n-k)!}.$$



Exemple. On cherche le nombre de mots de 3 lettres *distinctes* formés en choisissant 3 lettres du mot *BONUS*. D'après ce qui précède, il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités. En effet, il y a 5 choix possibles pour la première lettre, puis 4 choix pour la deuxième, et 3 pour la troisième.