Chapitre 7

Suites réelles

I Différentes définitions d'une suite

Définition - Suite réelle

On appelle *suite réelle* une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Si u est une suite réelle et $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est toujours noté u_n. La donnée de u_n en fonction de n est appelée *terme général* de la suite. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$, ou encore (u_n).

L'ensemble des suites réelles est noté $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou plus souvent $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarques.

- Attention aux notations : il ne faut pas confondre u_n, qui est un réel, et (u_n) qui désigne une suite.
- On peut généraliser et définir une suite u à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ comme une application de $[\![n_0, +\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Nous allons voir qu'on peut introduire une suite de plusieurs manières distinctes, qu'il conviendra de bien différencier.

Suites définies explicitement

Définition explicite. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement si son terme de rang n est donné explicitement en fonction de n. En d'autres termes, $u_n = f(n)$, pour une fonction f explicite.

Remarque. Si une suite est définie explicitement, on a directement accès à sont terme de rang n, par une évaluation de la fonction f de la définition. On déduit alors certaines propriétés de la suite directement des propriétés de f.

Exemple. Les suites $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n + \dfrac{n^3-3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont définies explicitement.

Suites définies par récurrence

Définition par récurrence. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie par récurrence si elle est donnée par
- son premier terme u_{n_0},
- une relation de récurrence qui exprime le terme u_{n+1} en fonction du précédent, et éventuellement de n, pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque. Si une suite est définie par récurrence, on ne peut alors calculer son terme de rang n qu'après avoir calculé tous les termes précédents. Pour éviter ceci, on essaie dès que possible de déduire l'expression explicite d'une suite à partir de sa définition par récurrence.

Exemple. La suite donnée par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + \dfrac{2}{n+1} \end{cases}$ est définie par récurrence.

Suite récurrente.

À l'aide de Python, les termes d'une suite définie par récurrence peuvent se calculer avec une boucle `for`, qui s'appuie sur le terme initial `u0` et la fonction `f` :

```
def U(n):
    u=u0
    for i in range(n):
        u=f(u)
    return(u)
```

Définition par récurrence d'ordre 2. Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie par récurrence d'ordre 2 si elle est donnée par
- ses deux premiers termes u_{n_0}, u_{n_0+1},
- une relation de récurrence qui exprime le terme u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n, et éventuellement de n, pour tout $n \geqslant n_0$.

Suites définies de manière implicite

Définition implciite. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière implicite lorsque pour tout n, u_n est défini comme étant l'unique solution d'une équation dépendant de n.

Remarque. Dans ce cas, on ne connaît pas toujours explicitement la valeur de u_n, mais seulement une propriété qui caractérise u_n.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$. L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On note alors u_n cette solution. On a ainsi défini une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, de manière implicite.

Vérification de l'existence et de l'unicité de la solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$, et on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Le théorème de la bijection assure alors que f_n définit une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$.
Par conséquent, il existe un unique réel dans $[0, 1]$, qu'on note u_n, tel que $f_n(u_n) = 0$. Comme $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, on a même $u_n \in]0, 1[$.

II Suites usuelles

1. Suites arithmétiques

Définition - Suite arithmétique

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

On dit alors que r est la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous rappelons la définition explicite d'une suite arithmétique ainsi que l'expression des sommes de ses termes, déjà rencontrées et démontrées au chapitre *Sommes et produits.*

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

- *Expression explicite* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = u_0 + nr.$$
De manière générale, si $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n - p)\, r$.
- *Somme des termes* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n + 1)\, \frac{u_0 + u_n}{2}.$$
De manière générale, si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1)\, \frac{u_p + u_n}{2}$.

Remarque. Un moyen de se rappeler cette formule est $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (\textit{nombre de termes})\, \frac{\textit{premier} + \textit{dernier terme}}{2}$.

2. Suites géométriques

Définition - Suite géométrique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = q\, u_n.$$

On dit alors que q est la *raison* de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous rappelons ici également la définition explicite d'une somme géométrique ainsi que l'expression des sommes de ses termes, déjà rencontrées au chapitre *Sommes et produits*.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

- *Expression explicite* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = u_0\, q^n.$$
De manière générale, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, $u_n = u_p\, q^{n-p}$.
- *Somme des termes* : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0\, \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ (n+1)\, u_0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$
De manière générale, si $q \neq 1$ et $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant p$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\, \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

3. Suites arithmético-géométriques

Définition - Suite arithmético-géométrique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b. \qquad (R)$$

Remarque. Si $a = 1$, la suite est arithmétique, et si $b = 0$, la suite est géométrique.

⚠ Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n ! Par exemple, les relations $u_{n+1} = 2^n u_n + 1$, ou encore $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{n}$ ne définissent pas des suites arithmético-géométriques !

Proposition - Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $\ell = \frac{b}{1-a}$,

- la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (u_0 - \ell)\, a^n + \ell$. De manière plus générale, si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $u_n = (u_p - \ell)^{n-p} + \ell$.

Remarque. On retiendra en toute généralité que si $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique comme ci-dessus avec $a \neq 1$, alors le terme général de la suite $(u_n)_n$ est de la forme $u_n = \lambda a^n + \ell$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, où on a toujours $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Démonstration. ♡ On commence par chercher ℓ pour avoir $\ell = a\ell + b$, on obtient alors $\ell = \frac{b}{1-a}$. Remarquons que ceci revient à chercher une suite *constante* qui vérifie la relation de récurrence (R).

Pour tout entier n fixé, on a alors
$$\begin{cases} u_{n+1} & = & au_n + b, \\ \ell & = & a\ell + b. \end{cases}$$
En soustrayant les deux équations, on obtient alors que $u_{n+1} - \ell \;=\; a\,(u_n - \ell)$.

En d'autres termes, si on pose $v_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vient de voir que $(v_n)_n$ est géométrique, de raison a. Ceci entraîne que pour tout entier n, on a $v_n = v_0 a^n$, c'est-à-dire $u_n - \ell = (u_0 - \ell)\,a^n$, qui s'écrit encore $u_n = (u_0 - \ell)\,a^n + \ell$.

Comme on a aussi $v_n = v_p a^{n-p}$, on obtient $u_n - \ell = (u_p - \ell)\,a^{n-p}$, ce qui s'écrit encore $u_n = (u_p - \ell)\,a^{n-p} + \ell$. ☐

Méthode - Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Si $a \neq 1$, on peut déterminer l'expression explicite de u_n de la manière suivante.

i. On cherche ℓ tel que $a\ell + b = \ell$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$.

ii. On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \;=\; \lambda\, a^n + \ell.$$
On détermine λ grâce à la connaissance d'un terme de la suite (souvent u_0).

Exercice 1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. On commence par résoudre l'équation $\ell = \frac{\ell}{2} - 1$, on obtient $\ell = -2$. Par conséquent, le terme général de $(u_n)_n$ est de la forme $u_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a alors $u_0 = \lambda - 2$. Comme $u_0 = 1$, on obtient que $\lambda = 3$. Finalement, on a $u_n = \frac{3}{2^n} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Somme des termes d'une suite arithmético-géométrique. Si $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique comme ci-dessus avec $a \neq 1$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=0}^{n} (u_0 - \ell)\,a^k + \ell \;=\; (u_0 - \ell)\,\frac{1 - a^{n+1}}{1-a} + (n+1)\,\ell.$$

4. Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Définition - Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+2} \;=\; au_{n+1} + bu_n. \tag{E}$$
Une telle suite est définie par récurrence d'ordre 2 si on se donne en plus ses deux premiers termes u_0 et u_1.

Remarque. On recherche toutes les suites géométriques vérifiant la relation de récurrence (E) dont le terme général est de la forme $u_n = r^n$, pour $r \in \mathbb{R}^\star$. L'équation (E) se récrit alors
$$r^{n+2} \;=\; ar^{n+1} + br^n,$$
ou encore, en divisant par r^n :
$$r^2 \;=\; ar + b. \tag{EC}$$
Finalement, les suites de cette forme qui vérifient (E) sont les suites de terme général $u_n = r^n$, où r est racine du polynôme $r^2 - ar - b$. On commence donc par résoudre l'équation (EC), appelée *equation caractéristique* associée à la relation de récurrence (E).

Dans le cas où (EC) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les suites $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ vérifient donc la relation (E). On remarque même que si λ et μ sont des réels, alors la suite $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_n$ vérifie aussi la relation (E). Nous allons voir dans le Théorème ci-dessous que les suites qui vérifient (E) sont en fait toutes de cette forme.

Définition - Equation caractéristique

L'équation caractéristique associée à une suite vérifiant (E) est

$$x^2 - ax - b = 0. \tag{EC}$$

Théorème - Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant (E). On note Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique (EC).

i. Si $\Delta > 0$: l'équation (EC) a deux solutions réelles r_1 et r_2. Dans ce cas, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

ii. Si $\Delta = 0$: l'équation (EC) a une unique solution réelle r_0. Dans ce cas, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n.$$

Démonstration. Plus tard dans l'année. □

Remarque. Si on connaît les deux premiers termes u_0 et u_1 d'une suite $(u_n)_n$ qui vérifie (E), on peut donc déterminer les valeurs des constantes λ et μ, et ainsi déterminer l'expression explicite de la suite.

Remarque. *Le cas* $\Delta = 0$. Revenons sur les commentaires ci-dessus : dans le cas où $\Delta = 0$, il n'y a qu'une solution r_0 à l'équation caractéristique. Dans ce cas, on observe que la suite donnée par $(n\, r_0^n)$ vérifie également (E) en remarquant que

$$\begin{aligned} (n+2)r_0^{n+2} - a(n+1)r_0^{n+1} - b\, n\, r_0^n &= r_0^n \left(n(r_0^2 - ar_0 - br_0) + 2r_0^2 - ar_0\right) \\ &= r_0^n \big(n\underbrace{(r_0^2 - ar_0 - br_0)}_{=0} + r_0\underbrace{(2r_0 - a)}_{=0}\big) \;=\; 0. \end{aligned}$$

En effet, comme $\Delta = 0$, l'unique racine du polynôme est donnée par $r_0 = \frac{a}{2}$, ce qui donne bien $2r_0 - a = 0$.
Par conséquent, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda r_0^n + \mu n r_0^n)_n$ vérifie la relation (E). Le théorème ci-dessus affirme que toutes les suites vérifiant (E) sont de cette forme.

Exemple. *Suite de Fibonacci.* On cherche l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

On commence par écrire l'équation caractéristique associée :

$$r^2 = r + 1.$$

Le discriminant associé vaut 5, et les racines sont $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait alors que u_n est de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0, \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu, \\ \lambda(r_1 - r_2) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

III Etude des suites réelles

1. Suites majorées, minorées, bornées

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite réelle.

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Dans ce cas, on dit que M est un *majorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou que la suite est *majorée* par M.
- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Dans ce cas, on dit que m est un *minorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou que la suite est *minorée* par m.
- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est minorée et majorée, c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Remarques.

- On remarque qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée si et seulement si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée, minorée ou bornée, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$.

  Par exemple, supposons que (u_n) est majorée à partir d'un rang n_0, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant M$. Notons $M' = \max\{u_n,\ 0 \leqslant n < n_0\}$ la valeur maximale de la suite avant le rang n_0. La suite $(u_n)_n$ est alors majorée par $M'' = \max(M, M')$. En effet, si $n < n_0$, on a $u_n \leqslant M' \leqslant M''$, et si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant M \leqslant M''$.

  On dit dans ce cas que la suite vérifie cette propriété *à partir d'un certain rang*.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.
  Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée si : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K$.

Exemples.

1. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0), mais pas majorée.
2. La suite $\big(\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. La suite $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni majorée, ni minorée.

2. Variations

Définition - Suite croissante, décroissante, constante, monotone, stationnaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- ⋆ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* (*resp. strictement croissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (*resp.* $u_{n+1} > u_n$).
- ⋆ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* (*resp. strictement décroissante*) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ (*resp.* $u_{n+1} < u_n$).
- ⋆ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* (*resp. strictement monotone*) si elle est croissante (*resp.* strictement croissante), ou décroissante (*resp.* strictement décroissante).
- ⋆ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.

Exemples.

1. La suite nulle est constante.
2. La suite $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. La suite $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
4. La suite $\left(\left\lfloor \frac{5}{n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Méthode - Étude de la monotonie d'une suite

Pour déterminer la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :

- montrer que $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant,
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes *strictement positifs*, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1,
- étudier la fonction f si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est donné par $u_n = f(n)$.

Exemples.

1. La suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-n} + 1$ est monotone.
2. Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive, décroissante si sa raison est négative.
3. La suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante si $\alpha \geqslant 0$, décroissante si $\alpha \leqslant 0$ et constante si $\alpha = 0$.
4. La suite $\left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
5. La suite $\left(n\,\mathrm{e}^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$, comme dans l'exemple du début du chapitre. Nous avons vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$, ce qui définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Nous nous intéressons ici à sa monotonie.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.

Solution.

1. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_{n+1}^{n+1} = 1 - u_{n+1}$. Ainsi,
$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1} - 1 = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) > 0,$$
car $u_{n+1} \in]0,1[$, ce qui entraîne que $1 - u_{n+1} > 0$. Ainsi, on a bien $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Nous avons vu que la fonction f_n était strictement croissante. On peut donc déduire de l'inégalité $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ que $u_{n+1} > u_n$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.

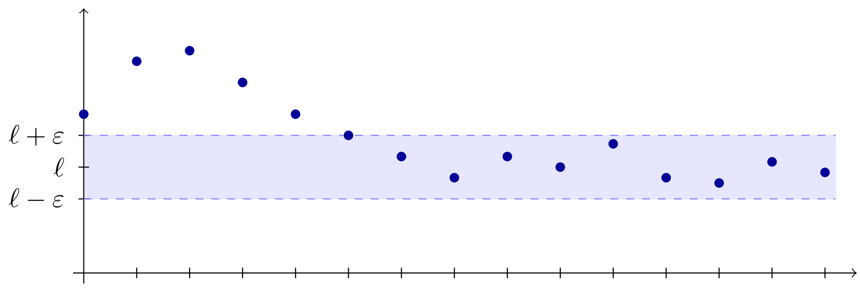
IV Convergence des suites réelles

1. Limite d'une suite, suites convergentes

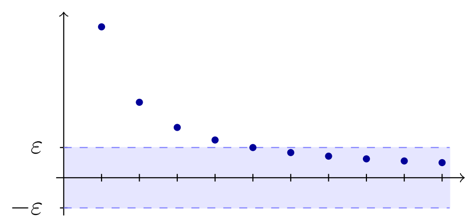
Définition - Suite convergente

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. En d'autres termes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a
$$u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[, \quad \text{ce qui s'écrit aussi } \; |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou plus simplement $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque. Lorsqu'une suite ne tend pas vers une limite finie, on dit qu'elle *diverge*.



Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0. En effet, soit $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ un intervalle ouvert contenant 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n} > 0$ donc
$$\tfrac{1}{n} \in I \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \tfrac{1}{\varepsilon}.$$
Ainsi, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.



Remarques.

- On peut se contenter d'intervalles du type $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ dans la définition, du fait que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient un intervalle de la forme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.
- Avec des quantificateurs, la définition se récrit :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- On n'écrit pas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avant d'avoir justifié l'existence de la limite.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si

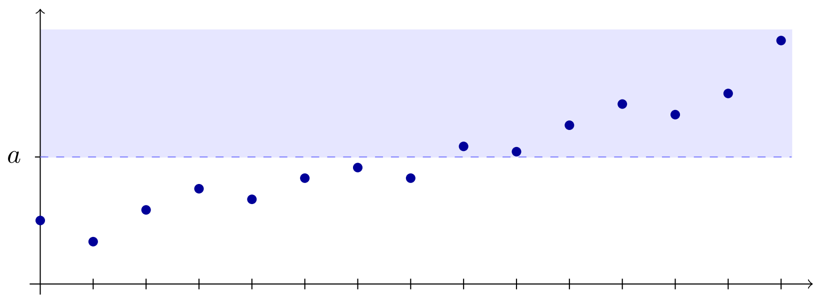
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant a.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

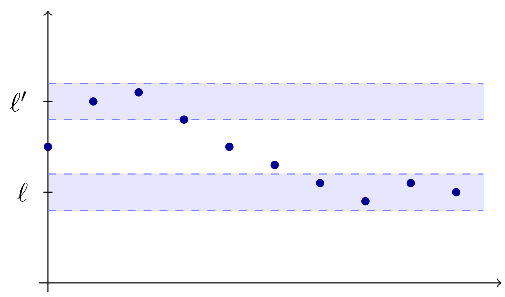


Proposition - Unicité de la limite

Si une suite admet une limite, finie ou non, alors celle-ci est unique.

Idée de la preuve, dans le cas où la suite admet une limite finie : on suppose l'existence de deux limites distinctes ℓ et ℓ'.

On peut alors choisir deux intervalles ouverts disjoints qui contiennent respectivement ℓ et ℓ' (voir dessin ci-contre). Ces intervalles doivent donc chacun contenir tous les u_n à partir d'un certain rang. Par conséquent, à partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir eux deux intervalles, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction.



Proposition - Limite finie et caractère borné

Si une suite admet une limite finie alors elle est bornée.

Démonstration. D'après la définition d'une suite convergente, si $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ à partir duquel l'intervalle $]\ell - 1, \ell + 1[$ contient tous les u_n. Ainsi, si $n \geqslant n_0$, on a $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$.
Ceci prouve que $(u_n)_n$ est bornée à partir du rang n_0, elle est donc bornée. □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais ne converge pas.

Proposition - Signe de la limite et signe de la suite

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui tend vers une limite $\ell > 0$ ou vers $+\infty$, alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

De même, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell < 0$, ou vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.

Démonstration.

- *Cas* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$: par définition, l'intervalle $]\frac{\ell}{2}, 3\frac{\ell}{2}[$, qui contient ℓ, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. Ainsi, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant \frac{\ell}{2} > 0$, donc $u_n > 0$.
- *Cas* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$: par définition, l'intervalle $[1, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0. Ainsi, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \geqslant 1 > 0$, donc $u_n > 0$.

Le deuxième cas se traite de manière analogue. □

⚠ Le résultat devient faux si l'inégalité est large ! Par exemple : si $u_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell = 0$. On a $\ell \geqslant 0$, mais (u_n) n'est pas positive à partir d'un certain rang.

Proposition - Rangs pairs, rangs impairs

Une suite réelle $(u_n)_n$ tend vers ℓ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) si et seulement si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent toutes les deux vers ℓ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).

Démonstration. Voir TD. □

Remarque. Par contraposée, si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ne convergent pas toutes les deux, ou admettent deux limites différentes, alors $(u_n)_n$ ne converge pas.
Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont des suites constantes donc convergentes, respectivement vers 1 et -1, donc la suite $(u_n)_n$ ne converge pas.

Exercice 3. Montrer que la suite $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2. Opérations sur les limites

Proposition - Somme et multiplication par un scalaire de suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites finies et λ un réel. Les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

On a les règles de calcul suivantes pour la limite d'une somme, et la limite de la multiplication d'une suite par un scalaire λ.

$\lim v$ \ $\lim u$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*ind.*
$-\infty$	$-\infty$	*ind.*	$-\infty$

Valeurs de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n$

$\lim u$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

Valeurs de $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$

Les cas notés *ind.* désignent des formes dites *indéterminées* : différents cas peuvent se produire, et on ne peut donc pas statuer dans le cas général. Il convient dans ce cas de faire une étude plus poussée de la suite, comme nous allons le voir plus loin.

Proposition - Produit de suites convergentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites admettant des limites finies, alors la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right).$$

On a les règles de calcul suivantes pour la limite d'un produit.

$\lim v$ \ $\lim u$	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell\ell' > 0$	0	$\ell\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' = 0$	0	0	0	*ind.*	*ind.*
$\ell' < 0$	$\ell\ell' < 0$	0	$\ell\ell' > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	*ind.*	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	*ind.*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Valeurs de $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n$

Les règles suivantes s'appliquent pour la limite de l'inverse d'une suite à termes non nuls.

$\lim u$	$\ell \in \mathbb{R}^\star$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{u}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0^+	0^-

Cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$:
- si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$,
- si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$,
- sinon, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'a pas de limite.

Proposition - Passage à la limite des inégalités

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Remarques.

- Si $(u_n)_n$ est une suite positive convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
- ⚠ Une inégalité stricte devient large à la limite ! Si deux suites convergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, mais pas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en général !

  Par exemple, si $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

La proposition suivante utilise la notion de limite de fonction, que nous n'avons pas encore traitée, mais qui est déjà connue intuitivement. Elle sera rendue rigoureuse dans un prochain chapitre.

Proposition - Limite composée

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui admet une limite ℓ finie ou infinie.

$$\text{Si } \lim_{x\to\ell} f(x) = \ell', \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell',$$

où ℓ' est également une limite finie ou infinie.

Remarque. En particulier, comme nous le reverrons prochainement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

3. Gestion de certaines formes indéterminées

Un principe pour la gestion de formes indéterminées du type de celles décrites dans le paragraphe précédent est de factoriser par le terme dominant, de manière à faire apparaître des termes ayant une limite nulle, que l'on pourra ignorer.

Exemple. Calcul de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n = \frac{n^2+3}{n^3-3n+4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^2+3}{n^3-3n+4} = \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\,\frac{1+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

a. Croissances comparées

Théorème - Croissances comparées

Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n!} = 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{\ln(n)^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n^\beta} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = +\infty.$$

Démonstration. Voir plus loin. □

Exercice 4. Calculer les limites suivantes.

$$1.\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n/2-3}}{4n^4-3n^2+1}, \qquad 2.\ \lim_{n\to+\infty} \ln(n^n)\,\mathrm{e}^{-n}.$$

1. On a $\dfrac{\mathrm{e}^{n/2-3}}{4n^4-3n^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{4-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\,\dfrac{\mathrm{e}^{n/2}}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $4-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$, et $\dfrac{\mathrm{e}^{n/2}}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On a $\ln(n^n)\,\mathrm{e}^{-n} = \dfrac{n\ln n}{\mathrm{e}^n} = \dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}\,\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: par croissances comparées, $\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. Utilisation de la conjugaison

Certaines formes indéterminées peuvent être levées en ayant recours à la quantité conjuguée : pour $a, b \in \mathbb{R}$, on récrit $a-b$ sous la forme

$$a-b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Dans certains cas, notamment lorsque l'expression fait apparaître des racines carrés, cette réécriture lève l'indétermination, et permet un calcul simple de limite.

Exemple. Calcul de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: on a

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = n\,\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

c. Utilisation de la dérivée

Rappel. Une fonction réelle f est dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$ si la limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et est finie. On l'appelle alors dérivée de f en x, et on la note $f'(x)$. Dans ce cas, pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0,

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x).$$

Ceci permet de calculer des limites qui font apparaître un terme du type $f(x+h_n)$, où f est une fonction dérivable en $x \in \mathbb{R}$, et $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemples.

1. On retrouve le calcul de limite du paragraphe ci-dessus : en posant $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$, on a
$$\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(1) = \frac{1}{2}.$$
Par conséquent, $n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1}\right) = \frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
2. On peut calculer par ce biais la limite de la suite $\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_n$ en posant $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \ln(x)$:
$$\frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(1) = 1.$$
Par conséquent, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(1)\right) = \frac{f(1+\frac{1}{n})-f(1)}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
La continuité de la fonction exp permet de déduire la limite suivante, qui est à connaître :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

4. Théorèmes d'existence

a. Encadrement, comparaison

Théorème - Encadrement, ou théorème des gendarmes

Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui ont même limite $\ell \in \mathbb{R}$, et

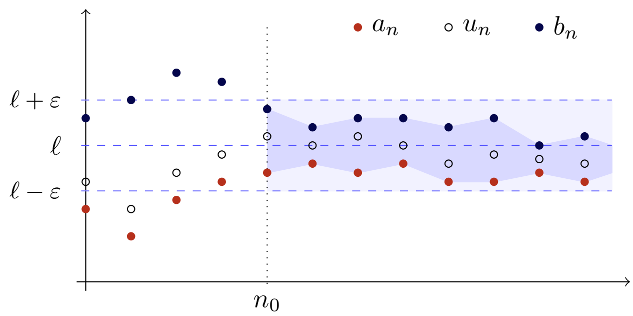
$$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n,$$

à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) admet également ℓ pour limite.

Idée de la démonstration : Pour simplifier, on se place dans le cas où $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il suffit de voir que pour un intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ (qui contient ℓ), on sait qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les a_n et tous les b_n sont contenus dans l'intervalle.

Alors, à partir de ce rang n_0, l'inégalité $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ implique que les u_n sont également tous contenus dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, ce qui conclut.



Méthode - Montrer qu'une suite converge vers un réel donné

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, on cherche à majorer $|u_n - \ell|$ par une suite $(a_n)_n$ qui tend vers 0 : si $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leqslant a_n,$$

alors l'encadrement $-a_n \leqslant u_n - \ell \leqslant a_n$ assure bien que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, 2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k+9}}$, $n \in \mathbb{N}$, 3. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème - Comparaison

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. Alors :

- si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- si $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple. Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^4 + n^2 + 4n + 4}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{n^2+4n+4} = \sqrt{(n+2)^2} = n+2$, car $n+2 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$u_n \geqslant n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par le théorème de comparaison, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Théorème de la limite monotone

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_n$ est croissante, alors : – si $(u_n)_n$ est majorée, alors elle converge,
  – si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

  Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors : – si $(u_n)_n$ est minorée, alors elle converge,
  – si $(u_n)_n$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

  Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$, on a $u_n \geqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Une suite croissante et majorée par M converge mais pas forcément vers M !

Remarques.

- Une suite monotone admet donc forcément une limite, finie ou infinie.
- Si une suite est monotone à partir d'un certain rang, le résultat du théorème est toujours valable.

Corollaire - Suite définie par une somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *positive* et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, donc (S_n) tend vers $+\infty$ ou vers une limite finie positive.

Exemple. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ est strictement croissante. On peut montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

c. Convergence des suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si :

- ⋆ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- ⋆ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Remarque. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \leqslant v_n.$$

En effet, si pour un rang n_0, on a $u_{n_0} > v_{n_0}$, alors la monotonie des suites (u_n) et (v_n) implique que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > v_{n_0} \geqslant v_n$, ce qui contredit le fait que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème - Théorème des suites adjacentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors,

i. les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite ℓ finie,

ii. si $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Démonstration. Nous avons vu ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Ainsi, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ par décroissance de $(v_n)_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante et majorée par v_0. On en déduit qu'elle converge vers un réel noté ℓ.
De même, on a $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée. Elle converge alors vers un réel noté ℓ'.
Par conséquent, la suite $(v_n - u_n)_n$ converge vers $\ell' - \ell$. D'après la définition des suites adjacentes, on a alors $\ell' - \ell = 0$, soit $\ell = \ell'$. Finalement, on a bien montré que les deux suites convergent vers la même limite ℓ.
La croissance de $(u_n)_n$ et la décroissance de $(v_n)_n$ entraînent donc bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell$. □

Exemple. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\, n!}$. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n!} > 0$, donc $(u_n)_n$ est croissante, et $(v_n)_n$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes, et le théorème des suites adjacentes affirme qu'elles convergent donc toutes deux vers la même limite.

Python.

Les suites adjacentes permettent d'obtenir une approximation de la limite car d'après *ii.* elles encadrent la limite. Dans l'exemple précédent, si on appelle ℓ la limite de ces suites alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Ainsi, pour trouver une approximation de la limite à ε près, il suffit de calculer u_n jusqu'à ce que $v_n - u_n \leqslant \varepsilon$.

5. Introduction à l'étude des suites récurrentes

On s'intéresse ici à l'étude des suites définies par récurrence qui sont de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ fixé,} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \tag{R}$$

où f est une fonction réelle.

Proposition - Limite d'une suite récurrente (HP)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est une fonction réelle continue. Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors

$$f(\ell) = \ell.$$

On dit dans ce cas que ℓ est un *point fixe* de f.

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors
- on a $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de f,
- on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Par unicité de la limite, on a alors $f(\ell) = \ell$. □

⚠ L'étude générale de ces suites n'est pas explicitement au programme. On veillera donc à détailler l'obtention de la condition $f(\ell) = \ell$ à chaque fois que l'on s'en servira.

⚠ Toutes les suites définies par récurrence ne sont pas de la forme (R). Par exemple, si $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ pour tout entier n, on ne peut pas écrire u_{n+1} sous la forme $f(u_n)$ à l'aide d'une fonction indépendante de n.