Chapitre 8

Systèmes linéaires et matrices

I Généralités sur les systèmes linéaires

1. Définitions

Définition - Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- ⋆ Un *système linéaire* à n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$ est un système d'équations de la forme

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_n \end{array}$$

  où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $a_{i,k}$ et b_i sont des réels connus.

- ⋆ $x_1, \dots, x_p$ sont les *inconnues* du système. On appelle *coefficients* du système les réels $a_{i,j}$ où $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, et *second membre* du système le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$.
- ⋆ Pour $i \in [\![1, n]\!]$, n désignera par $\boxed{L_i}$ la i-ième ligne du système, c'est-à-dire l'équation

$$L_i : \qquad a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i$$

- ⋆ Une *solution* de (S) est un p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ vérifiant toutes les équations. L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des p-uplets solutions de (S).
- ⋆ Lorsque $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$, c'est-à-dire que tous les réels b_i sont nuls, on dit que le système est *homogène*.
- ⋆ Le système (S_0) obtenu à partir de (S) en remplaçant le second membre $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$ est appelé le *système homogène* associé à (S).
- ⋆ *Écriture matricielle.* Le système (S) se récrit $AX = B$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

  La matrice A est alors dite matrice associée au système linéaire (S).

Remarque. Si p est petit on utilisera plutôt les lettres $x, y, z, t, \dots$ pour désigner les inconnues.

Exemples.

- Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 3y + 2z - t & = & 2 \\ 2y + 3t & = & -1 \end{array} \right.$ est un système linéaire.
  - Il a pour matrice associée $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
  - Il a pour système homogène associé $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x - 3y + 2z - t & = & 0 \\ 2y + 3t & = & 0 \end{array} \right.$.
- Les systèmes $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 4y & = & 2 \\ 2y + 3t & = & -1 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} x - 7y + 2z & = & 2 \\ (x-1)(y-2) & = & 1 \end{array} \right.$ ne sont pas des systèmes linéaires.

Remarque. Il est utile de connaître l'interprétation géométrique suivante.

- si $p=2$: l'ensemble des points (x,y) du plan qui vérifient une contrainte de la forme $ax+by=\alpha$ est une droite (si a et b ne sont pas tous les deux nuls). Résoudre un système de la forme
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x+a_{1,2}y & = & b_1 \\ a_{2,1}x+a_{2,2}y & = & b_2 \end{array}\right.$$
revient à trouver l'ensemble des points du plan qui appartiennent aux deux droites. On cherche donc l'intersection de ces droites, qui peut être vide (si les droites sont parallèles et distinctes), réduite à un point (si les droites sont sécantes), ou une droite entière (si les droites sont confondues).
- si $p=3$: l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace qui vérifient une contrainte de la forme $ax+by+cz=\alpha$ est un plan (si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls). Résoudre un système de la forme
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x+a_{1,2}y+a_{1,3}z & = & b_1 \\ a_{2,1}x+a_{2,2}y+a_{2,3}z & = & b_2 \\ a_{3,1}x+a_{3,2}y+a_{3,3}z & = & b_3 \end{array}\right.$$
revient à trouver l'ensemble des points de l'espace qui appartiennent aux trois plans. On cherche donc l'intersection de ces plans, qui peut être vide, réduite à un point, une droite, ou un plan entier, selon les cas.

Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits *équivalents* s'ils admettent le même ensemble de solutions.

Exemple.

Les systèmes $\left\{\begin{array}{ll} x-4y=1 & L_1 \\ 2x+y=0 & L_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ll} x-4y=1 & L_1 \\ 2x+y=0 & L_2 \\ -x-5y=1 & L_3 \end{array}\right.$ sont équivalents car l'équation L_3 équivaut à L_1-L_2.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires que nous allons proposer reposent sur la transformation du système par un système équivalent qui est facile à résoudre. Ces transformations se feront en utilisant des opérations dites élémentaires, qui changent le système en un système équivalent.

2. Opérations élémentaires

Proposition - Opérations élémentaires

Les opérations suivantes transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

1. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_j$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $j\neq i$.
2. Echanger deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$.
3. Multiplier une ligne L_i par une constante λ *non nulle* : $L_i\leftarrow \lambda L_i$.
4. Changer l'ordre des inconnues dans le système : $x_i \leftrightarrow x_j$.

Remarques.

- En combinant 1 et 3, on obtient que l'opération $L_i\leftarrow \lambda L_i+\mu L_j$, où $\lambda\neq 0$ et $j\neq i$ change le système en un système équivalent.
- En appliquant plusieurs fois 1, on voit qu'ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes change le système en un système équivalent.

⚠ Une erreur classique est d'effectuer simultanément des opérations qu'on ne peut pas décomposer en plusieurs opérations élémentaires successives, et donc à transformer un système en un système qui ne lui est pas équivalent. L'exemple suivant l'illustre bien.

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y=4 & L_1 \\ x-y=1 & L_2 \end{array}\right. \quad (S_1) \qquad\qquad \begin{array}{l} L_1\leftarrow L_1+L_2 \\ L_2\leftarrow L_1+L_2 \end{array} \qquad\qquad \left\{\begin{array}{ll} 2x+y=5 & L_1 \\ 2x+y=5 & L_2 \end{array}\right. \quad (S_2)$$

Si l'on effectue l'une après l'autre les deux opérations ci-dessus, on n'obtient pas le système (S_2). De fait, les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas équivalents : (S_1) a une unique solution $(2,1)$, et (S_2) a une infinité de solution.

II Résolution des systèmes linéaires

Nous allons distinguer deux cas : le cas où le système est simple (échelonné), pour lequel nous résoudrons le système par substitution, et le cas général, où nous chercherons à nous ramener à un système échelonné par des opérations élémentaires en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Il faut retenir qu'on ne résoudra plus les systèmes non échelonnés par substitution !

1. Systèmes échelonnés

Définition - Matrice échelonnée, système échelonné

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite *échelonnée* si

- chaque ligne non nulle de A commence par strictement plus de zéros que la précédente,
- lorsqu'une ligne de A est nulle, toutes les suivantes le sont.

On dit qu'un système linéaire est *échelonné* s'il est associé à une matrice échelonnée.

Exemples.

- La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est échelonnée, donc le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 4\,x+y+z & = & 2 \\ 2\,z & = & 3 \end{array} \right.$ est échelonné.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée, le système $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 2 \\ z-t & = & 3 \\ 2z+3t & = & 1 \\ 5t & = & 0 \end{array} \right.$ n'est pas échelonné.

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice échelonnée, alors elle est triangulaire. En revanche, la réciproque est fausse, comme le montre le dernier exemple ci-cessus.

Méthode - Résolution de système linéaire échelonné

Pour résoudre un système linéaire associé à une matrice échelonnée qui a exactement k lignes non nulles :

1. On choisit k inconnues, qui seront dites *principales*.
2. On les exprime les inconnues principales en fonction des autres, qui seront dites *secondaires*, et seront traitées comme des paramètres.

Remarque. Encadrer les inconnues principales peut être une bonne habitude pour les distinguer des inconnues secondaires.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\boxed{x}-2y+z & = & -3 \\ \boxed{y}+4z & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3\boxed{x}-2(3-4z)+z & = & -3 \\ \boxed{y} & = & 3-4z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \boxed{x} & = & 1-3z \\ \boxed{y} & = & 3-4z \end{array} \right.$$

Les solutions sont donc tous les triplets de la forme $(1-3z,\, 3-4z,\, z)$, où $z \in \mathbb{R}$.

2. Méthode du pivot de Gauss

Il s'agit de se ramener au cas précédent, que l'on sait traiter. On utilise les opérations élémentaires pour se ramener à un système équivalent qui est triangulaire ou échelonné.

Exemple. Considérons

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_1)$$

- *Première étape :* On utilise les opérations élémentaires pour transformer le système en un système équivalent où l'inconnue x n'apparaît pas dans les deux dernières équations. Puis, on transforme ce dernier système en un système équivalent où les inconnues x et y n'apparaissent pas dans la dernière équation.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -6y & + & 18z & = & 12 & \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ & & -3y & + & 7z & = & 2 & \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -y & + & 3z & = & 2 & \leftarrow L_2/6 \\ & & -3y & + & 7z & = & 2 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & 4z & = & 0 & \\ & & -y & + & 3z & = & 2 & \\ & & & & -2z & = & -4 & \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

- *Seconde étape :* On résout le système triangulaire ou échelonné :

$$(\mathcal{S}_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y+4z \\ y & = & 3z-2 \\ z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 4 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Théorème - Pivot de Gauss

Tout système linéaire (S) est équivalent à un système linéaire échelonné, obtenu à partir de (S) par opérations élémentaires.

Nous décrivons ici l'algorithme, dit du *pivot de Gauss*, qui permet d'obtenir un système linéaire échelonné par transformations élémentaires, à partir d'un système linéaire quelconque

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \\ L_n \end{array}$$

- Si $a_{1,1} \neq 0$: on utilise L_1 pour éliminer x_1 des autres lignes du systèmes, en faisant les opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} L_2 & \leftarrow & L_2 - \dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}} L_1 \\ & \vdots & \\ L_n & \leftarrow & L_n - \dfrac{a_{n,1}}{a_{1,1}} L_1 \end{array}$$

- Si $a_{1,1} = 0$, il y a deux cas de figure :
  - s'il existe une ligne i telle que $a_{i,1} \neq 0$, alors on échange les lignes 1 et i : $L_1 \leftrightarrow L_i$, et on procède ensuite comme ci-dessus,
  - sinon, x_1 est quelconque : c'est une inconnue secondaire qui peut être traitée comme un paramètre, et on passe à x_2.

À la suite de cette étape, on obtient donc que le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & a'_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{n,p}x_p & = & b'_n \end{array}\right.$$

On peut ensuite renouveler cette opération sur le système constitué des $n-1$ dernières équations. Et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention d'un système échelonné.

Remarque. Dans la pratique, il sera parfois utile, autant que faire se peut, de se ramener par opérations élémentaires au cas où $a_{1,1} = 1$, de manière à simplifier les calculs. Sinon, on cherchera si possible à faire des opérations qui n'introduisent pas de fractions.

Exemples. 1. $\left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{x} & +y & +z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = -1 \\ x & -y & +2z & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} \boxed{x} & +y & +z & = 1 & \\ & -\boxed{y} & -z & = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -2y & +z & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} \boxed{x} & +y & +z & = 1 & \\ & -\boxed{y} & -z & = -3 & \\ & & 3\boxed{z} & = 6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x} = 1 - y - z = -2 \\ \boxed{y} = 3 - z = 1 \\ \boxed{z} = 2 \end{array}\right.$

L'ensemble solution est $\{(-2, 1, 2)\}$.

2. $\left\{\begin{array}{rrrl} \boxed{x} & +2y & +z & = 1 \\ 2x & +3y & -z & = 2 \\ -x & -y & +2z & = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} \boxed{x} & +2y & +z & = 1 & \\ & -\boxed{y} & -3z & = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & y & +3z & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} \boxed{x} & +2y & +z & = 1 & \\ & -\boxed{y} & -3z & = 0 & \\ & & 0 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x} = 1 - 2y - z = 1 + 5z \\ \boxed{y} = -3z \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions est $\{(1+5z, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 0) + z(5, -3, 1),\ z \in \mathbb{R}\}$. La représentation dans $\mathbb{R}^3$ des solutions est donc la droite passant par le point $(1, 0, 0)$, de vecteur directeur $\vec{v} : (5, -3, 1)$.

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & - & 5z & = & -4 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -2 \\ 2x & & & + & 3z & = & 7 \\ x & + & 5y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

Remarque. Il n'y a que trois cas possibles dans la résolution d'un système linéaire :
- pas de solution,
- une unique solution,
- une infinité de solutions.

III Matrices et systèmes linéaires

1. Calcul de l'inverse d'une matrice avec les systèmes

Proposition - Inversibilité et système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ a une unique solution X.

Dans le cas où A est inversible, l'unique solution du système linéaire $AX = Y$ est donnée par $X = A^{-1}Y$.

Démonstration. Si A est inversible et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$, ce qui donne bien que l'équation $AX = Y$ a pour unique solution $A^{-1}Y$.

Supposons maintenant que pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue X a une unique solution. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note C_j la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non nul est le $j^{\text{ème}}$, qui vaut 1. On note par ailleurs X_j l'unique solution de l'équation $AX_j = C_j$. Si on pose

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array}\right), \quad \text{alors} \quad AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AX_1 & AX_2 & \dots & AX_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array}\right) = I_n.$$

On a donc bien montré que A est inversible, d'inverse B. □

Remarque. Le point 1 de la proposition se récrit :

$$A \text{ est inversible} \iff \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = Y.$$

En d'autres termes :

$$A \text{ est inversible} \iff \varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \text{ est bijective.}$$

Méthode - Recherche d'inverse d'une matrice par système linéaire

1. On fixe $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on résout $AX = Y$.
2. On discute ensuite selon les cas suivants.
   - S'il existe une unique solution X : on écrit la solution X en fonction de Y, et on identifie avec $X = A^{-1}Y$ pour retrouver la matrice A^{-1}.
   - Sinon, la matrice A n'est pas inversible.

Exemples.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on résout $AX = Y$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +3y & +z & = & a \\ x & +y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & b \\ 2x & +3y & +z & = & a \\ x & +y & +z & = & c \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & +2z & = & b \\ & y & -3z & = & a-2b \\ & & -z & = & c-b \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & -a & -2b & +5c \\ y & = & a & +b & -3c \\ z & = & & b & -c \end{array}\right.$$

Finalement, $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on résout $BX = Y$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ x & +2y & +z & = & b \\ -x & +4y & +5z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ & 2y & +2z & = & b-a \\ & 4y & +4z & = & c+a \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ & 2y & +2z & = & b-a \\ & & 0 & = & 3a-b+c \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Le système admet soit une infinité de solutions, soit aucune. On en déduit donc que B n'est pas inversible.

La proposition suivante, admise pour le moment, montre qu'on peut en fait se contenter de considérer le système linéaire homogène de matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour déterminer si A est inversible.

Proposition - Inversibilité et système linéaire homogène

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ est inversible si et seulement si l'équation } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour unique solution } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat sera exploité dans le paragraphe suivant pour fournir un moyen rapide de déterminer par la méthode du pivot de Gauss si une matrice donnée est inversible.

Nous introduisons la notion de noyau d'une matrice, qui sera utile dans la suite des cours d'algèbre, et permettra une reformulation de la proposition ci-dessus.

Définition - Noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A l'ensemble des solutions $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
On note cet ensemble $\ker A$:

$$\ker A \ = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \ AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On peut alors reformuler la proposition ci-dessus de la manière suivante : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$A \ \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme nous l'avions déjà remarqué dans un chapitre précédent, nous retrouvons ici le fait que s'il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que AX est nul, alors A n'est pas inversible.

On déduit de ce fait les conditions ci-dessous, qui permettent de voir rapidement qu'une matrice n'est pas inversible.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si A a une ligne ou une colonne nulle, alors A n'est pas inversible.
- Si A a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, alors A n'est pas inversible.
- Si une ligne (*resp.* une colonne) de A est une combinaison linéaire d'autres lignes (*resp.* autres colonnes) de A, alors A n'est pas inversible.
- S'il existe une combinaison linéaire non triviale et nulle de lignes (*resp.* de colonnes) de A, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. Nous démontrons le premier point. Si on suppose que la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est nulle, et si on note X la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf le $j^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors on a $AX = 0$:

$$AX \ = \left(\begin{array}{cc|c|c} \star & \star & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & 0 & \star \end{array} \right) \begin{pmatrix} \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme X n'est pas nul, on en déduit que A n'est pas inversible.

Si on suppose que la $j^{\text{ème}}$ ligne de A est nulle, on se ramène au cas précédent en remarquant que ${}^tA$ a une colonne nulle, et n'est pas donc pas inversible. Comme A est inversible ssi ${}^tA$ l'est, on en déduit le résultat.

Les autres points peuvent être démontrés de manière analogue en choisissant une matrice colonne X qui convient. La preuve est laissée en exercice. □

Exemples.

1. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible : on constate que $L_3 = L_1 + L_2$.

2. Si B est la matrice de l'exemple du paragraphe précédent, on constate que $L_3 = -3L_1 + 2L_2$, et on retrouve que B n'est pas inversible.

2. Méthode du pivot pour déterminer si une matrice est inversible

Si l'on souhaite seulement déterminer si une matrice est inversible (sans calculer son inverse), on n'a pas besoin de résoudre un système linéaire. Les opérations élémentaires sur la matrice suffisent pour conclure, ce qui permet d'éviter d'écrire le second membre, et facilite l'écriture des opérations.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A' est obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, alors

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad A' \text{ est inversible.}$$

Remarque. Ici, on autorise aussi les opérations élémentaires sur les colonnes : en effet, on a vu que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible.

Exemple. Considérons à nouveau la matrice A de l'exemple précédent. En faisant les mêmes opérations sur les lignes, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Comme cette dernière matrice est triangulaire et a ses coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible. On en déduit que A est également inversible.