

Chapitre 9

Probabilités sur un univers fini

L'objet d'étude des probabilités est l'*expérience aléatoire*, qui est par définition une expérience qui peut avoir des issues différentes si elle est répétée. Elle est opposée en cela aux expériences dites *déterministes*, qui ont toujours la même issue si on les répète.

Pour étudier ces expériences, on sera amené à :

- énumérer toutes les issues possibles (qui seront en nombre fini dans ce chapitre),
- associer à chacune de ses issues un nombre mesurant la vraisemblance de cette issue, appelé probabilité de cette issue.

Une fois ces éléments définis, on cherchera à donner une mesure de vraisemblance à tout groupe parmi les issues, qu'on appellera *événement*.

I Vocabulaire des probabilités

1. Expérience aléatoire et univers

Définition - Expérience aléatoire

Une expérience *aléatoire*, par opposition à une expérience *déterministe*, est une expérience qui peut avoir des résultats différents lorsqu'elle est répétée.

Exemple. Le tirage de boules numérotées indiscernables dans une urne, le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, l'arrivée de clients à un guichet dans une gare, sont des expériences aléatoires.

Définition - Univers

On appelle *univers*, généralement noté Ω , l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un élément de Ω est appelé une issue et est généralement noté ω .

Dans ce chapitre, on considère uniquement des univers finis.

Remarque. Un seul élément de Ω est observé à l'issue de l'expérience.

Exemples.

- Lancer d'une pièce de monnaie : l'univers peut être $\Omega = \{P, F\}$.
– Lancer d'un dé équilibré à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lancer de deux pièces successivement (l'ordre compte) : $\Omega = \{(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)\} = \{P, F\}^2$.
– Lancer de deux dés successivement (l'ordre compte) : $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
Ici, les issues sont des couples $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, car on prend l'ordre en compte.
- On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des 52 cartes. Une issue est la donnée de l'ensemble des 5 cartes de la main, pour lesquelles l'ordre ne compte pas. On peut donc prendre $\Omega = \{P \subset \mathcal{C}, \text{Card } P = 5\}$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-parties de $\mathcal{C}$ qui contiennent 5 éléments.
Ici, les issues sont des sous-ensembles de $\mathcal{C}$ car l'ordre ne compte pas : l'issue $\{8 \heartsuit, 9 \clubsuit, V \clubsuit, R \diamondsuit, R \heartsuit\}$ est la même que l'issue $\{8 \heartsuit, R \heartsuit, 9 \clubsuit, V \clubsuit, R \diamondsuit\}$.
- Pour un oral, on tire au sort l'ordre de passage de quatre candidats, numérotés de 1 à 4. Une issue est une façon d'ordonner les 4 candidats. On peut définir Ω comme l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$: $\Omega = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), \dots\}$.
Ici, les issues sont des 4-uplets car l'ordre compte : $(1, 2, 3, 4)$ n'est pas la même issue que $(3, 1, 4, 2)$.
- Pour un oral, on choisit cette fois 4 candidats parmi un groupe de 10 candidats, numérotés de 1 à 10, qui passeront leur oral le premier jour, ainsi que leur ordre de passage. On peut choisir pour Ω l'ensemble des 4-uplets d'éléments distincts de $\llbracket 1, 10 \rrbracket$.

2. Événements

Dans toute la suite, Ω désigne l'univers associé à une expérience aléatoire.

Définition - Événement

On appelle événement de Ω un sous-ensemble de Ω , c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Soit A est un événement de Ω .

- Si $A = \Omega$, l'événement est dit certain,
- Si $A = \emptyset$, l'événement est dit impossible.
- Si A est un singleton, l'événement est dit élémentaire.

Remarque. Il arrive qu'un événement soit noté sous la forme d'une proposition. Dans ce cas, l'événement considéré est l'ensemble des issues de Ω qui rendent vraie la proposition.

Exemple. Dans le cas de l'expérience du lancer de dé, l'événement $A = \{2, 4, 6\}$ peut être décrit comme

A : “Le résultat du dé est pair”.

Exemples.

1. Dans le cas du lancer de dé équilibré à 6 faces :

A : “le résultat obtenu est pair” est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$,

B : “on obtient un résultat supérieur à 10” est $B = \emptyset$, c'est un événement impossible,

C : “le résultat obtenu est 4” est $C = \{4\}$, c'est un événement élémentaire.

2. Dans le cas de deux lancers de pièce successifs :

D : “on obtient au moins un Pile” est l'événement $D = \{(P, F), (P, P), (F, P)\}$,

E : “on obtient au moins un Pile ou au moins un Face” est $E = \{(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)\} = \Omega$, c'est un événement certain.

Exercice 1. On se place dans le cadre des exemples du dernier paragraphe. Pour chaque situation, écrire explicitement l'événement A décrit par une proposition.

1. Dans le cas des deux lancers de deux pièces successifs, A : “le premier lancer donne Face”.
2. Dans le cas du tirage de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes : A : “le joueur obtient une quinte flush royale (cinq carte de la même couleur, dont la plus élevée est l'as)”.
3. Dans le cas des 4 candidats à l'oral d'un concours, A : “les candidats 1, 2, 3 passent dans cet ordre”.

Un événement étant un ensemble, toutes les opérations que nous connaissons sur les ensembles peuvent être appliquées ici. Il convient toutefois de connaître l'interprétation de ces opérations, et leur terminologie dans le cadre des probabilités, qui diffère dans certains cas.

Rappels sur les ensembles.

- Si $A \subset \Omega$, alors
 - ◊ $\overline{\overline{A}} = A$,
 - ◊ $\overline{\emptyset} = \Omega$,
 - ◊ $\overline{\Omega} = \emptyset$.
- Si $A, B \subset \Omega$, alors
 - ◊ $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$,
 - ◊ $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.
- Lois de Morgan : si $A, B \subset \Omega$, alors
 - ◊ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
 - ◊ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dans le tableau ci-dessous sont listées les notions ensemblistes essentielles aux probabilités, avec leurs terminologies et interprétations en probabilité.

Ensembles◇ **Complémentaire**

$\bar{A} = \Omega \setminus A$: complémentaire de A .

◇ **Inclusion**

$A \subset B$: A est inclus dans B .

◇ **Union**

$A \cup B$: union de A et B .

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$: union des A_i .

◇ **Intersection**

$A \cap B$: intersection de A et B .

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n$: intersection des A_i .

◇ **Ensembles disjoints**

Si $A \cap B = \emptyset$: ensembles disjoints

◇ **Partition**

$(A_1, \dots, A_n)$ partition de Ω :

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$

Événement en probabilités◇ **Contraire**

$\bar{A}$ événement contraire :

$\bar{A}$ est réalisé ssi A ne l'est pas.

Exemple. si A : “le résultat est pair”,
alors $\bar{A}$: “le résultat est impair”.

◇ **Inclusion d'événements**

L'événement A est inclus dans B :

Dès que A est réalisé, B est réalisé.

Exemple. si A : “le résultat est 2” et
 B : “le résultat est pair”, alors $A \subset B$.

◇ **Union d'événements**

$A \cup B$: “ A ou B ”.

$A \cup B$ est réalisé ssi A est réalisé ou B est réalisé.

Exemple. A : “le résultat est pair”, B : “le résultat est 1”,
alors $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$.

$\bigcup_{i=1}^n A_i$ est réalisé ssi au moins l'un des A_i est réalisé.

◇ **Intersection d'événements**

$A \cap B$: “ A et B ”.

$A \cap B$ est réalisé ssi A est réalisé et B est réalisé.

Exemple. A : “le résultat est pair”, B : “le résultat est ≤ 3 ”,
alors $A \cap B = \{2\}$.

$\bigcap_{i=1}^n A_i$ est réalisé ssi tous les A_i sont réalisés.

◇ **Événements incompatibles**

$A \cap B = \emptyset$: événements incompatibles.

Exemple. si A : “le résultat est 2”, B : “le résultat est impair”,
alors A et B sont incompatibles.

◇ **Système complet d'événements**

$(A_1, \dots, A_n)$ système complet d'événements :

- les A_i deux à deux incompatibles,
- l'un des A_i est réalisé.

Finalement : exactement un des A_i est réalisé.

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces. L'univers est $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$.

On note :

A : « le résultat obtenu est pair »,

B : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 5 »,

C : « le résultat obtenu est impair ».

Alors :

$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$,

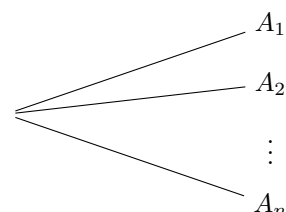
$A \cap B = \{6\}$,

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$,

$A \cap C = \emptyset$.

Systèmes complets d'événements

Comme on l'a vu ci-dessus, un système complet d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition de Ω . En termes probabilistes, ceci signifie qu'exactly un des A_i est réalisé. Il arrive qu'on représente des situations comme celle-ci par un arbre :



Remarque.

- Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événement, alors pour tout événement B , on a

$$B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_2) \sqcup \dots \sqcup (B \cap A_n).$$

- Si A est un événement, alors $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.
- Pour tout univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements. Il s'agit de la partition de Ω en événements élémentaires.

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces. On note A : « le résultat obtenu est 1 », B : « le résultat obtenu est 2 ou 3 », et C : « le résultat est entre 4, 5 ou 6 ». Alors (A, B, C) est un système complet d'événements.

II Probabilité

1. Définition

Une probabilité associe à chaque événement un nombre qui mesure sa vraisemblance : un réel dans $[0, 1]$.

Définition - Probabilité

On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\diamond \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

$$\diamond \text{ pour tous } A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \quad (\text{additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est appelé un *espace probabilisé*.

Remarque. On retiendra que pour tout événement A , $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$. Par conséquent, il conviendra de vérifier pour chaque calcul de probabilité qu'on obtient bien un nombre de $[0, 1]$.

Exemple. On considère à nouveau le cas du lancer de dés à 6 faces, pour lequel $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. On peut définir une probabilité sur Ω par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{Card } A}{6}. \end{aligned}$$

où on rappelle que pour un ensemble fini A , $\text{Card } A$ désigne le nombre d'éléments de A .

Plus généralement, on introduit la notion de probabilité uniforme, qui correspond au cas où tous les événements élémentaires ont même probabilité.

Définition - Probabilité uniforme

Si Ω est fini, on appelle probabilité uniforme sur Ω la probabilité définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit qu'il y a *équiprobabilité*.

Remarque.

- Il faut comprendre la définition de probabilité uniforme de la manière suivante : comme tous les événements élémentaires ont même probabilité $\frac{1}{\text{Card } \Omega}$, il suffit pour connaître la probabilité d'un événement de compter le nombre d'issues qui le composent, et de multiplier par la probabilité d'un événement élémentaire.
- On retrouve alors la relation parfois écrite sous la forme $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

2. Propriétés

Proposition - Propriétés d'une probabilité

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers fini Ω et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

- i. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- ii. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- iii. $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Si de plus $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
- iv. *Croissance* : Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- v. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. – Montrons i. et ii.. On a $A \sqcup \bar{A} = \Omega$, donc $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. On en déduit donc que $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

En appliquant ceci à l'événement certain Ω , on obtient $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$, ce qui donne ii..

- Montrons iii. et iv.. On sait que $B = (B \cap \bar{A}) \sqcup (B \cap A) = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$, donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$, ce qui donne bien $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Dans le cas où $A \subset B$, on a $A \cap B = A$, et on a bien $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, on a donc $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$, ce qui entraîne que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

- Ce dernier point se démontre par récurrence directe à partir de la propriété d'additivité de $\mathbb{P}$, il est laissé en exercice. $\square$

Exercice 2. On lance un dé à 6 faces, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au chiffre inscrit sur cette face. Déterminer les probabilités d'obtenir chacune des faces du dé.

La formule ci-dessous permet de calculer la probabilité d'une union d'événements, qui ne sont pas nécessairement incompatibles deux à deux. On ne la donne que dans le cas de 2 ou 3 événements, mais une version plus générale existe.

Proposition - Formule du crible pour 2 ou 3 événements

Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers fini Ω et $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ trois événements.

- i. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- ii. $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Remarque. – En particulier, on a $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

– Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration. i. On a $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$, donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} \text{ii. On a } \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{=(A \cap C) \cup (B \cap C)}) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \quad \square \end{aligned}$$

Théorème - Formule des probabilités totales (première version)

Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers fini Ω et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de Ω . Pour tout

événement B , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Démonstration. Ceci découle directement de l'égalité $B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_2) \sqcup \dots (B \cap A_n)$ vue plus haut. $\square$

Remarque. En particulier, si A et B sont des événements,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}).$$

Proposition

Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, où les ω_i sont deux à deux distincts, et $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

III Probabilités conditionnelles

Il arrive qu'une connaissance sur la réalisation d'un événement change l'étude d'une expérience aléatoire : on sait qu'un événement A donné est réalisé, ce qui a une influence possible sur la réalisation d'autres événements.

Exemple. On s'intéresse à deux lancers de pièces consécutifs, et on note les résultats obtenus. L'univers associé est alors $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$, et la probabilité associée est la probabilité uniforme. Si on appelle B l'événement $\{(P, P)\}$, alors on a $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.

Si on ajoute maintenant l'information : l'événement

A : "on obtient au moins une fois pile"

est réalisé, alors l'univers doit être modifié : $\Omega' = \{(P, P), (P, F), (F, P)\}$. La probabilité associée, qu'on notera $\mathbb{P}_A$ est la probabilité uniforme sur Ω' . Cette fois, on a donc $\mathbb{P}_A(B) = \frac{1}{3}$.

1. Définition

Définition - Probabilité conditionnelle

Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $B \subset \Omega$, on appelle probabilité de B sachant A le réel

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

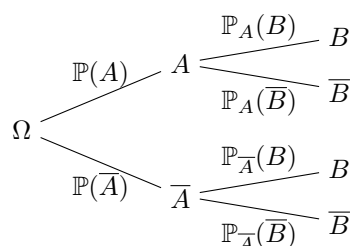
On dit aussi *probabilité de B conditionnellement à A* .

Remarque. On retiendra que dans la pratique, si A et B sont des événements de probabilité non nulle, on peut écrire

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B), \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B).$$

Selon les informations dont on dispose, on pourra choisir l'une ou l'autre.

Ce résultat peut être visualisé sur un arbre : on obtient la probabilité de $A \cap B$ en faisant le produit des probabilités sur chacune des branches de l'arbre suivant.



Exercice 3. On extrait deux boules au hasard, successivement et sans remise, d'une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Proposition - $\mathbb{P}_A$ est une probabilité

Si $A \subset \Omega$ et $\mathbb{P}(A) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité. En particulier, on a donc :

- i. $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}_A(\emptyset) = 0$.
- ii. $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ pour tout événement B .
- iii. $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$ pour tous événements B, C .

2. Formule des probabilités composées

La formule de la proposition ci-dessous, dites des probabilités composées, est une généralisation de la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)$ au cas de plusieurs événements.

Théorème - Formule des probabilités composées

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements. On suppose que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\ &= \mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)} = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

car le produit ci-dessus est télescopique. □

Remarque. On pensera à utiliser la formule des probabilités composées lorsque l'expérience aléatoire comporte plusieurs étapes et lorsque le résultat final dépend des étapes précédentes. C'est le cas lorsque l'événement qui nous intéresse peut être décrit chronologiquement.

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. L'expérience consiste à tirer au hasard, successivement et sans remise, n boules dans l'urne. Si on note B_i l'événement "la i ème boule tirée est blanche", la probabilité que les n boules tirées soient blanches s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \frac{n-2}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n!}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

3. Formule des probabilités totales

Rappel : On a vu que si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Une conséquence immédiate est la deuxième écriture de la formule des probabilités totales ci-dessous.

Proposition - Formule des probabilités totales (seconde version)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Dans le cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$, on obtient $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \mathbb{P}(\bar{A})$.

Démonstration. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$, on obtient bien la formule à partir de la relation $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i)$. $\square$

Remarque. On a souvent recours à cette version, du fait qu'on a souvent accès à des probabilités conditionnelles.

Exemple. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n - k$ boules rouges. On choisit au hasard (avec probabilité uniforme) une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On cherche la probabilité de l'événement B : "la boule est blanche". Si on note U_i l'événement "on choisit l'urne numéro i ", on s'aperçoit que $U_1, \dots, U_n$ forment un système complet d'événements, de probabilité non nulle. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}_{U_1}(B) \mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}_{U_2}(B) \mathbb{P}(U_2) + \dots + \mathbb{P}_{U_n}(B) \mathbb{P}(U_n) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

4. Formule de Bayes

La formule de Bayes est une simple conséquence de la formule $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B)$ dans le cas où les événements sont de probabilité non nulle. On retiendra qu'elle relie $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Proposition - Formule de Bayes

Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque. Si on combine ce résultat avec la formule des probabilités totales pour le calcul de $\mathbb{P}(B)$, on obtient

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\bar{A}}(B) \mathbb{P}(\bar{A})},$$

qui est une forme fréquemment utilisée de la formule de Bayes.

Plus généralement, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, chacun de probabilité non nulle, et B est de probabilité non nulle, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$

IV Événements indépendants**1. Indépendance de deux événements**

Intuitivement, on dit que deux événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation de l'autre. Dans le cas où les événements sont de probabilité non nulle, ceci s'écrit $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Nous allons opter pour une définition qui reste valide lorsque les événements sont de probabilité nulle.

Définition - Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarques.

- La notion d'indépendance est relative à la probabilité $\mathbb{P}$ utilisée.
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- En pratique, l'indépendance de deux événements est souvent une *hypothèse* de modélisation. On supposera que deux événements sont indépendants s'ils ne paraissent avoir aucun lien potentiel, c'est-à-dire si rien ne laisse présumer de l'existence d'une corrélation entre eux.

Exemple.

On effectue deux lancers de pièces de monnaie, et on note les événements :

- A : "les résultats des deux lancers sont les mêmes",
- B : "on obtient Pile au premier lancer",
- C : "on obtient au moins une fois Pile".

L'univers pour cette expérience est donné par $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$, et la probabilité est uniforme. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$. On a

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc A et B sont indépendants,
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ donc A et C ne sont pas indépendants,
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ donc B et C ne sont pas indépendants.

 Attention à ne pas confondre événements indépendants ($\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$) et événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$).

Il faut d'ailleurs avoir à l'esprit que si deux événements A et B de probabilité non nulle sont incompatibles, alors ils *ne sont pas indépendants*, en effet on a alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ceci est d'ailleurs conforme à l'intuition : si on sait que A et B ne peuvent être réalisés simultanément, alors la réalisation d'un des deux événements a une influence évidente sur la réalisation de l'autre.

Proposition - Indépendance et événements contraires

Si deux événements A et B sont indépendants alors

- ◊ $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants,
- ◊ $\bar{A}$ et B sont indépendants,
- ◊ A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration.

◊ Il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))$: on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)). \end{aligned}$$

◊ Montrons que $\bar{A}$ et B sont indépendants, ce qui montrera également le troisième point. Comme $A \cap \bar{B} = A \setminus B$,

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}). \quad \square$$

2. Indépendance mutuelle

Définition - Indépendance mutuelle

On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont *mutuellement indépendants*, ou *indépendants dans leur ensemble* si

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in J} A_k \right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k).$$

Remarque. L'indépendance mutuelle de n événements implique leur indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse ! Voir par exemple l'exercice 15 du TD.

Exemple. Trois événements A, B et C sont mutuellement indépendants si

- ◇ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$,
- ◇ $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(C)$,
- ◇ $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$,
- ◇ $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$.

Exercice 4. On lance deux dés de couleurs distinctes. On considère les événements suivants :

- A : « le premier dé donne un nombre pair »,
- B : « le second dé donne un nombre impair »,
- C : « la somme des deux dés est paire ».

Étudier les rapports de dépendances, deux à deux et mutuelle, entre les événements A, B et C .

Proposition - Indépendance et événements contraires

Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors il en est de même pour les événements $B_1, \dots, B_n$, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$