Chapitre 10

Limites et continuité

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et à valeurs réelles. Si f est définie sur une union d'intervalles, on peut se ramener au cas précédent en considérant la fonction séparément sur chacun des intervalles.

I Limite d'une fonction

1. Définitions

a. Limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition - Limite finie en un point

Soient x_0 un point de I ou une extrémité finie de I et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f *admet ℓ pour limite en x_0* si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou, plus simplement $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarques.

- Il faut comprendre la définition de la limite de la manière intuitive suivante : $f(x)$ peut être rendu *arbitrairement proche* de ℓ, pourvu que x soit *assez proche* de x_0.
  On peut récrire la définition avec des quantificateurs : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
- Comme pour les suites, on ne peut écrire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ qu'après avoir justifié l'existence de la limite.

Comme pour les suites, la limite, lorsqu'elle existe, est unique. La démonstration de la proposition ci-dessous est d'ailleurs une adaptation directe de la preuve de l'unicité de la limite pour les suites.

Proposition - Unicité de la limite

Soit x_0 un point de I ou une extrémité finie de I et $\ell \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite en x_0, alors celle-ci est unique.

b. Limite infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition - Limite infinie en un point

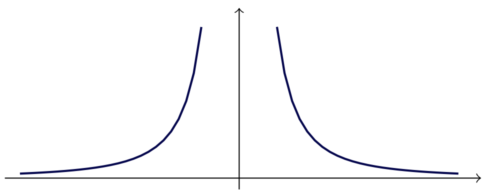
Soit x_0 un point de I ou une extrémité finie de I.

- ⋆ On dit que f *admet $+\infty$ pour limite en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si
  $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x) \geqslant A.$$
- ⋆ On dit que f *admet $-\infty$ pour limite en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si
  $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x) \leqslant A.$$

Remarque. Il y a toujours unicité de la limite dans ce cadre.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$ vérifie

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$



c. Limites à gauche et à droite en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition - Limite à gauche, limite à droite

Soit x_0 un point de I ou une extrémité finie de I et $\ell \in \mathbb{R}$.

- ⋆ On dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- ⋆ On dit que f *admet ℓ pour limite à droite en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- ⋆ On dit que f *admet $+\infty$ pour limite à gauche en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0[,\ f(x) \geqslant A.$$

- ⋆ On dit que f *admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0*, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, si

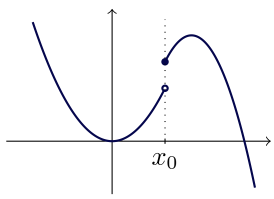
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \alpha[,\ f(x) \geqslant A.$$

- ⋆ On définit de même la limite à gauche égale à $-\infty$, la limite à droite égale à $-\infty$.

Remarque.

- La fonction f vérifie $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ admet ℓ si la restriction de f à $I \cap] - \infty, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0.
- L'existence de la limite à gauche en x_0 ou de la limite à droite en x_0 ne dépend ni de l'existence, ni de la valeur de $f(x_0)$.
- **Interprétation graphique.** Lorsque la limite (à gauche ou à droite) de f en x_0 est infinie, on dit que la courbe représentative de f a une *asymptote verticale* d'équation $x = x_0$.

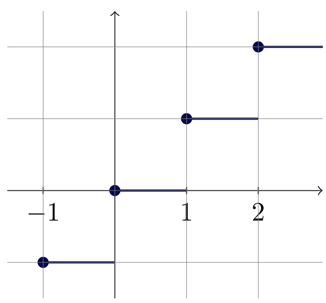
⚠ Les limites à droite et à gauche peuvent être distinctes.



Exemple. Si f désigne la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, alors on a

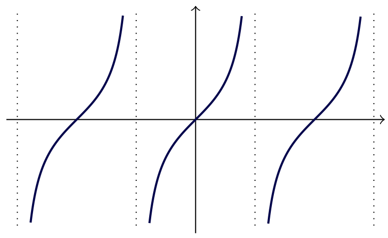
$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to k^+} f(x) = k.$$

On dit qu'il y a un saut en k.



Exemple. Si f désigne la fonction tangente, on a

$$f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} = +\infty, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} = -\infty.$$



Méthode - Étude de la limite en un point à l'aide des limites à gauche et à droite

Pour certaines fonctions, il est pertinent de séparer l'étude de la limite en deux cas : limite à gauche et limite à droite.

- Si f admet des limites à gauche et à droite en $x_0 \in I$, égales à $f(x_0)$, alors f a une limite en x_0, égale à $f(x_0)$.
- Si les limites à gauche et à droite sont différentes, ou si l'une d'elles n'existe pas, alors f n'admet pas de limite en x_0.

Exemple. La fonction partie entière admet des limites distinctes à gauche et à droite en 1, donc elle n'admet pas de limite en 1.

Exercice 1. Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$.

d. Limites en $\pm\infty$

Définition - Limite finie ou infinie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont $+\infty$ est une extrémité et $\ell \in \mathbb{R}$.

- ⋆ On dit que f *admet ℓ pour limite en $+\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \geqslant B, \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- ⋆ On dit que f *admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si

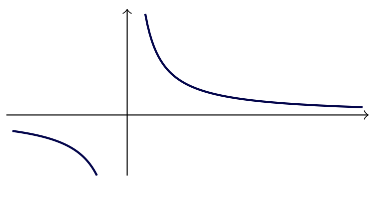
$$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \geqslant B, \ f(x) \geqslant A.$$

- ⋆ On dit que f *admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$*, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \geqslant B, \ f(x) \leqslant A.$$

Remarque. On définit de manière analogue les limites d'une fonction en $-\infty$ en changeant tous les « $\exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \geqslant B$ » par « $\exists B \in \mathbb{R}, \ \forall x \leqslant B$ ».

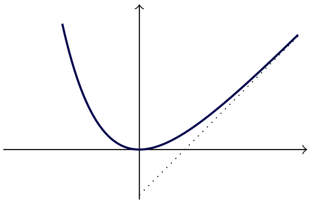
Exemple. La fonction inverse admet pour limite 0 en $+\infty$.



Interprétation graphique.

- ⋆ Lorsque f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ on dit que la courbe représentative de f a en $+\infty$ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$.
- ⋆ Soit a, b deux réels. Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \big((f(x) - (ax+b)\big) = 0$, on dit que la courbe représentative de f a en $+\infty$ une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$.
- ⋆ On définit de la même façon une asymptote horizontale ou oblique en $-\infty$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x - 1$ a une asymptote oblique en $+\infty$, d'équation $y = x - 1$.



2. Théorèmes généraux sur les limites

a. Limites et opérations

Les règles de calculs sur les limites de fonctions sont analogues à celles vues sur les suites dans un chapitre précédent. On peut résumer certains de ces résultats par des tableaux.
Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f et g deux fonctions admettant des limites en x_0.

Addition - $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big)$

$\lim f$ \ $\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Multiplication par un réel λ - $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x)$

λ \ $\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	∞	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

Produit - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Inverse - $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	0 et $f(x) < 0$	0 et $f(x) > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{f}$	$\dfrac{1}{\ell}$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	0	0

Exemple. Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée, tout peut arriver ! Par exemple,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = 1, \quad \frac{x\,(2 + \cos x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ n'a pas de limite en } +\infty.$$

Exemples.

1. Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

2. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2}{\sin^2(x)}$: on a

$$1+x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \sin^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0^+, \text{ donc la forme n'est pas indéterminée, et } \frac{1+x^2}{\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}$: on a

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} = \frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}} = \frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b. Limites et composition

Proposition - Composition de limites

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J avec $f(I)\subset J$ (c'est-à-dire que $\forall x\in I, f(x)\in J$, donc la composée $g\circ f$ est bien définie). Soient $x_0, y_0, \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \text{ et } \lim_{y\to y_0} g(y)=\ell, \text{ alors } \lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=\ell.$$

Remarque. Ce théorème s'adapte aux cas de limites à gauche et à droite.

Exemples. Déterminons, si elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$: on a $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{x\to 1}\ln x = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha$, pour $\alpha\in\mathbb{R}_+^\star$: on a $\alpha\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$, car $\mathrm{e}^u \underset{u\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}$: on a $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\cos\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{1/x}$: on a $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$, et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition - Composition avec une suite

Soient f une fonction définie sur I, (u_n) une suite d'éléments de I et $x_0, \ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n)=\ell.$$

La proposition ci-dessus repose directement sur la définition de la limite d'une suite, et de la limite d'une fonction en un point. On en déduit immédiatement la méthode ci-dessous pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Méthode - Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point

Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

- Si on trouve une suite $(u_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et la suite $(f(u_n))_n$ n'ait pas de limite, alors f n'a pas de limite en x_0.
- Si on trouve deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_0$ et les suites $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ n'ont pas la même limite, alors f n'a pas de limite en x_0.

Exemple. La fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$: on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $u_n=2n\pi$, et $v_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors, on a

- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos(u_n)=\cos(2n\pi)=1$, donc $\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos(v_n)=\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$, donc $\cos(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, On en déduit donc que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

On aurait aussi pu utiliser la suite $(n\pi)_n$ qui tend aussi vers $+\infty$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donc la suite $(\cos(n\pi))_n$ n'a pas de limite.

c. Limites et inégalités

Proposition - Limite et signe

Soient f une fonction définie sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et ℓ un réel.

$$\text{Si } f \text{ est positive sur } I \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell, \quad \text{alors} \quad \ell \geqslant 0.$$

On rappelle que f est dite *positive* sur I si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

⚠ Comme pour les suites, une inégalité stricte devient large à la limite. Par exemple : on a $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, mais $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. Une conséquence immédiate du résultat précédent est la suivante : si $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est tel que f et g admettent une limite finie en x_0, alors :

$$\text{si } f(x) \leqslant g(x) \text{ pour tout } x \in I, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3. Théorèmes d'existence

a. Encadrement, comparaison

Théorème - Théorème d'encadrement pour une limite finie

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :

i. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$,

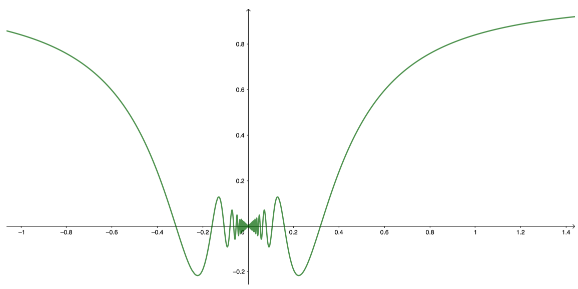
ii. Pour tout $x \in I, f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Alors, g admet une limite en x_0 et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Exemple. On considère la fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^\star$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, par encadrement on a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.



Théorème - Théorème de comparaison pour une limite infinie

Soient f, g deux fonctions définies sur I et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. On suppose que

$$\text{pour tout } x \in I, \ f(x) \leqslant g(x).$$

i. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,

ii. Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

b. Limites et sens de variation

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soient f une fonction définie sur $]a,b[$, avec $a,b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $x_0 \in]a,b[$. Si f est croissante sur $]a,b[$, alors

i. f admet en x_0 une limite finie à gauche et à droite et

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

ii. f admet une limite à droite en a. Cette limite est finie si et seulement si f est minorée. Si ce n'est pas le cas f tend vers $-\infty$.

iii. f admet une limite à gauche en b. Cette limite est finie si et seulement si f est majorée. Si ce n'est pas le cas f tend vers $+\infty$.

Remarque. Il y a un énoncé analogue pour f décroissante. L'écrire.

c. Limites usuelles et croissances comparées

Proposition - Limites usuelles

On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$: pour tout $x\in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, on a

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}1+\cos x=2$, on en déduit le résultat.

Exercice 2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$.

Proposition - Croissances comparées

On a, pour tout $\alpha,\beta,\gamma>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\gamma x}}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=0,\quad \text{et}\quad \lim_{x\to 0^+}x^\alpha|\ln x|^\beta=0.$$

En particulier,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\quad \text{et}\quad \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0.$$

Exemple. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}x^6\mathrm{e}^{-x^2}$.

Par croissances comparées, on a $y^3\,\mathrm{e}^{-y}=\frac{y^3}{\mathrm{e}^y}\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Ainsi, par composition, comme $x^2\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, on a $x^6\,\mathrm{e}^{-x^2}\underset{y\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

II Continuité

1. Continuité en un point

a. Définition

Définition - Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f *est continue en* x_0 si

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0).$$

La définition de la limite permet de reformuler ceci de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques.

- Pour que f soit continue en x_0, il est nécessaire que f soit définie en x_0.
- Le graphe d'une fonction continue sur un intervalle ne possède pas de saut. On peut donc le tracer « sans lever le crayon ». Attention cette interprétation est fausse si l'ensemble de définition n'est pas un intervalle.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$, définie sur $\mathbb{R}$, admet pour limite $2 = f(0)$ en 0. Elle est donc continue en 0.

Composition avec une suite. Soient f est une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.

$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \text{ssi} \quad \text{pour toute suite } (u_n)_n \text{ de } I \text{ telle que } u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0,\ f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Remarque. En particulier, si $(u_n)_n$ est une suite de I telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et f continue en ℓ, alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

b. Continuité à gauche, à droite

Définition - Continuité à droite et à gauche en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- ⋆ On dit que f *est continue à gauche en* x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- ⋆ On dit que f *est continue à droite en* x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition - Lien entre continuité à droite, à gauche et continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ où x_0 n'est pas une extrémité de I.

$$f \text{ continue en } x_0 \iff f \text{ continue à droite et à gauche en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

⚠ Attention, il ne suffit pas que les limites à droite et à gauche soient égales. Elles doivent être égales à la valeur de la fonction en ce point.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue à gauche, en 0 ? À droite ? Est-elle continue en 0 ?

c. Prolongement par continuité

Définition - Prolongement par continuité

Soient une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que

- $\star$ f n'est pas définie en x_0,
- $\star$ f admet une limite finie ℓ en x_0.

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par

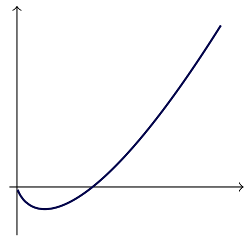
$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} D \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $D \cup \{x_0\}$, et est appelée *prolongement par continuité de f en x_0*. Dans la pratique, on notera toujours ce prolongement f.

Exemple. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f : x \mapsto x \ln x$$

est prolongeable par continuité en 0, d'après le théorème de croissance comparée.



⚠ Ne pas confondre une fonction définie en x_0 et continue en x_0 et une fonction non définie en x_0 prolongeable par continuité en x_0.

2. Continuité sur un ensemble

a. Généralités

Définition - Continuité sur un ensemble

On dit qu'une fonction définie sur un ensemble D est *continue sur D* si elle continue en tout point de D.

On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. On note parfois plus simplement $\mathcal{C}(D)$ ou $\mathcal{C}^0(D)$.

Remarque. Si D est de la forme $[a, b[$ (*resp.* $]a, b]$), alors f est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de $]a, b[$ et continue à droite en a (*resp.* à gauche en b).

Dans la suite, on se contentera d'énoncer les résultats dans le cas où f est définie sur un intervalle I, mais les résultats valent pour le cas plus général où f est définie sur une union finie d'intervalles.

Théorème - Continuité des fonctions usuelles

Les familles de fonctions usuelles suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

- les fonctions polynomiales (en particulier les fonctions constantes),
- la fonction *valeur absolue*,
- les fonctions ln, exp, les fonctions puissances,
- les fonctions racines : $\sqrt{\cdot}$ et plus généralement $\sqrt[n]{\cdot}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
- les fonctions cos, sin, arctan.

La démonstration de ce dernier résultat est admise ici. Certains de ces points reposent sur le fait que la bijection réciproque d'une fonction continue est elle-même continue, comme nous allons le voir plus loin.

Les résultats qui suivent reposent directement sur le lien entre limite et opérations, rappelé dans la partie précédente.

Proposition - Continuité et opérations

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel. Alors

i. $f+g$, λf et fg sont continues sur I.

ii. Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Remarque. L'ensemble des fonctions continues sur I, noté $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, est donc stable par combinaison linéaire, produit et passage à l'inverse si la fonction ne s'annule pas sur I.

Proposition - Composée de deux fonctions continues

Si f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et que g est une fonction continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Méthode - Pour montrer qu'une fonction est continue

1. On utilise les résultats généraux sur les intervalles où on peut le faire.
2. On étudie séparément (calculs de limite) les points qui posent problème.

Exercice 4. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$
2. $g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b. Le théorème des valeurs intermédiaires

Rappel. Pour une fonction f définie sur un intervalle I, l'ensemble image (image directe) de f noté $f(I)$ est défini par

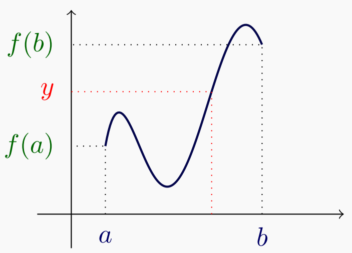
$$f(I) = \{f(x),\ x \in I\} = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

Rappelons également qu'une application est surjective lorsque son image est égale à l'espace d'arrivée.

Exemple. $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$, $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$.

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires



Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a < b$. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $x \in [a,b]$ tel que

$$f(x) = y.$$

Autrement dit, l'image de f est un intervalle.

Remarque. Dans la pratique, on se ramène souvent à $y = 0$, en appliquant le théorème à la fonction continue $x \mapsto f(x) - y$. Il s'agit alors de trouver des éléments a et b de I tels que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. Le théorème affirme alors qu'il existe $x \in I$ tel que $f(x) - y = 0$, c'est-à-dire $f(x) = y$.

On en déduit par ailleurs les autres formulations du théorème ci-dessous.

Autres formulations. *À connaître.*

1. Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x)=0$.
   En d'autres termes, une fonction qui change de signe sur un intervalle s'annule en au moins un point.
2. Une fonction continue sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I est de signe constant (il s'agit de la contraposée de la formulation précédente).

Remarques.

- Il s'agit d'un théorème d'*existence* : il établit qu'il existe un tel x, mais ne donne pas sa valeur explicite. Par ailleurs, ce réel n'est pas nécessairement unique.
- Le théorème devient faux si la fonction n'est pas continue, ou si l'on ne la considère pas sur un *intervalle* !

Exemple. Soit $f : x \mapsto x^3-4x+1$. Cherchons à approcher les points où f s'annule, c'est-à-dire les racines du polynôme x^3-4x+1, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f.

- Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0)=1$, il existe $x_1 \in]-\infty, 0[$ tel que $f(x_1)=0$.
- Comme $f(0)=1$ et $f(1)=-2$, donc il existe $x_2 \in]0,1[$ tel que $f(x_2)=0$.
- Comme $f(1)=-2$ et $f(2)=1$, donc il existe $x_3 \in]1,2[$ tel que $f(x_3)=0$.

On peut par ailleurs affiner le premier encadrement : comme $f(-3)=-14$ et $f(-2)=1$, on a en fait $x_1 \in]-3,-2[$. Comme on sait que le polynôme x^3-4x+1 n'a pas plus de trois racines, on donc trouvé toutes les racines.

Méthode - Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires

- Pour montrer l'existence d'une solution $x \in I$ à une équation $f(x)=y$, pour un réel y fixé, on peut procéder de la manière suivante.
  1. On montre que f est continue sur l'intervalle I.
  2. On montre qu'il existe deux réels $a,b \in I$ tels que $f(a) \leqslant y$ et $f(b) \geqslant y$.

  Le théorème assure alors bien l'existence d'un réel x tel que $f(x)=y$, du fait que y est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Pour montrer qu'il existe $x \in I$ tel que $f(x)=g(x)$, où f et g sont des fonctions continues sur I : on peut introduire une autre fonction (dite alors *fonction auxiliaire*) pour se ramener au cas ci-dessus.
  Par exemple, on peut poser $h : x \mapsto f(x)-g(x)$ et chercher $x \in I$ tel que $h(x)=0$.

L'exercice suivant est très classique, et doit être très bien connu.

Exercice 5. Montrer que toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ admet un point fixe, c'est-à-dire un point $x \in [0,1]$ tel que $f(x)=x$.

Solution. On introduit la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x)-x$. définie sur $[0,1]$. La fonction g est continue comme somme de deux fonctions continues sur $[0,1]$. Il s'agit de montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x)=0$. On a :

- $f(0) \in [0,1]$ donc $f(0) \geqslant 0$, ce qui donne $g(0) \geqslant 0$,
- $f(1) \in [0,1]$ donc $f(1) \leqslant 1$, ce qui donne $g(1) \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe alors $x \in [0,1]$ tel que $g(x)=0$, soit $f(x)=x$.

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que pour tout x de I, $f(x)^2=5$. Montrons que f est constante.

Solution. Pour tout $x \in I$, on a $f(x)^2=5$, donc $f(x) \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. En particulier, f ne s'annule pas sur I. Supposons que f ne soit pas constante sur I : il existe alors $a,b \in I$ tels que $f(a)=\sqrt{5}$ et $f(b)=-\sqrt{5}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0 \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, il existe un réel $x \in I$ tel que $f(x)=0$, ce qui est une contradiction.

c. Le théorème de la bijection

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

- L'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle, et f définit une bijection de I sur J.
- La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Autre formulation. Par exemple dans le cas où f est continue strictement croissante de $I =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

- la fonction f est bijection de I sur $\left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$,
- pour tout $y \in \left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$, il existe une unique solution $x \in I$ à l'équation $y = f(x)$.

Remarque. Nous avons déjà utilisé ce théorème plusieurs fois, notamment pour définir la fonction exp à partir de la fonction ln, et pour définir la fonction arctan à partir de la fonction tangente.

Méthode - Montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une équation

Pour montrer que l'équation $y = f(x)$ a une unique solution $x \in I$, on peut :

- montrer que f est continue et strictement monotone sur I,
- expliciter $f(I)$ et montrer que $y \in f(I)$.

On peut d'ailleurs montrer ces deux points conjointement en étudiant les variations de f continue sur I.

Exemple. Montrons qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ à l'équation $e^x + x = 2$.

- La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est continue, strictement croissante comme somme de deux fonctions continues, strictement croissantes.
- Par le théorème de la bijection, f définit alors une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \right[= [1, +\infty[$.

Comme $2 \in [1, +\infty[$, on a bien existence et unicité d'une solution à l'équation dans $\mathbb{R}_+$.

d. Image d'un segment par une fonction continue

Définition - Minimum, maximum d'une fonction

- On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un maximum sur I en $x_0 \in I$, et on note $f(x_0) = \max\limits_{x\in I} f(x)$, si

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

- De même, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un minimum sur I en $x_0 \in I$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. On note alors $f(x_0) = \min\limits_{x\in I} f(x)$.

⚠ Il arrive qu'une fonction n'atteigne pas de maximum, ou pas de minimum sur l'intervalle où elle est définie. Par exemple, exp n'a pas de minimum sur $\mathbb{R}$, ou encore $f : x \mapsto x$ n'a pas de maximum sur $[0, 1[$.

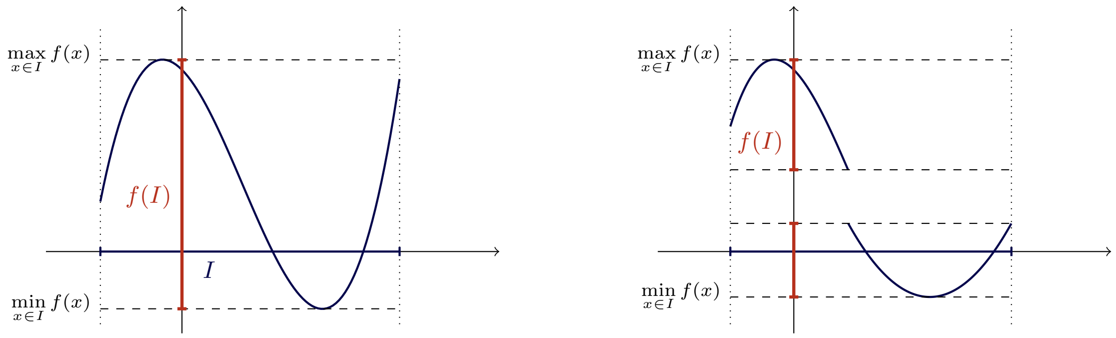
On appelle *segment* de $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné, c'est-à-dire tout intervalle de la forme $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Théorème - Théorème des bornes atteintes (admis)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ avec a,b deux réels tels que $a \leqslant b$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'elle admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$. De plus, on a :

$$f\big([a,b]\big) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x),\ \max_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

En particulier, l'image du segment $[a,b]$ par f est un segment.



Le théorème des bornes atteintes est illustré par la figure de gauche. Attention : lorsque la fonction n'est pas continue, $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle (voir figure de droite).

Exemple. Toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée. En effet :

- Si f est T-périodique, avec $T > 0$, alors f est continue sur le segment $[0,T]$ donc bornée sur $[0,T]$: il existe $M \geqslant 0$ tel que
$$\forall x \in [0,T], \quad |f(x)| \leqslant M.$$
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$. Ainsi, $x - nT \in [0,T]$, et par T-périodicité de f, on a :
$$|f(x)| = |f(\underbrace{x-nT}_{\in[0,T]})| \leqslant M.$$