Chapitre 11

Variables aléatoires réelles finies et lois usuelles

Il est fréquent qu'on s'intéresse à une quantité numérique qui dépend de l'issue d'une expérience aléatoire, plutôt qu'à l'issue de l'expérience elle-même.

À titre d'exemple, on considère le jeu suivant, qui consiste à faire un lancer de dé équilibré à 6 faces, avec les gains suivants :

- si le résultat est 1, 2 ou 3 : le joueur perd 1€,
- si le résultat est 4 ou 5 : le joueur ne perd rien, et ne gagne rien,
- si le résultat est 6 : le joueur gagne 2€.

On décrit la situation à l'aide d'une *fonction*, notée X, qui associe à chaque issue $\omega \in [\![1,6]\!]$ possible une quantité réelle qui correspond au gain algébrique. Ici :

$X(\omega) = -1$ si $\omega \in \{1,2,3\}$,
$X(\omega) = 0$ si $\omega \in \{4,5\}$,
$X(\omega) = 2$ si $\omega = 6$.

On appelle cette fonction une variable aléatoire réelle.

Dans tout le chapitre, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini, c'est-à-dire que Ω désigne un ensemble *fini* (l'univers), et $\mathbb{P}$ une probabilité sur l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.

I Variable aléatoire finie

1. Définition

Définition - Variable aléatoire réelle

- ⋆ On appelle *variable aléatoire réelle* sur Ω fini une application X de Ω dans $\mathbb{R}$. On notera souvent v.a.r. au lieu de variable aléatoire réelle.
- ⋆ Son image $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs réelles que X peut prendre, est appelé *univers image* de X.

⚠ Le terme de *variable aléatoire* réelle peut paraître trompeur :

- une variable aléatoire est en fait une fonction, donc pas une *variable*, au sens qu'on peut donner par exemple en informatique,
- une v.a.r. n'est pas à proprement parler aléatoire : elle associe de manière déterministe un réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.

Remarque. Dans ce cadre, Ω est fini donc $X(\Omega)$ est fini également : c'est pourquoi on parle de variable aléatoire *finie*. Nous nous placerons au second semestre dans le cadre plus général des variables aléatoires *discrètes*, pour lesquelles $X(\Omega)$ peut être infini.

Exemples.

1. Dans l'exemple du jeu de dé du début de chapitre, on a $X(\Omega) = \{-1, 0, 2\}$.
2. *Somme de deux dés.* On lance deux dés équilibrés, on peut décrire l'univers comme $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. La somme des valeurs obtenues sur les dés est alors donnée par la variable aléatoire :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (i,j) & \mapsto & i+j \end{array}.$$

Son univers image est $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.

Notation

Si X est une variable aléatoire finie et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ X$ est encore une variable aléatoire finie :

$$g \circ X(\omega) \;=\; g(X(\omega)) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

On la note $g(X)$.

Exemples.
- Si $g : x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors $g(X) = aX + b$.
- Si $g : x \mapsto x^2$, alors $g(X) = X^2$.

Notation

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

- ◇ Pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

  $[X = x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$: il s'agit de l'événement "X vaut x",
  $[X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leqslant x\}$: il s'agit de l'événement "X est inférieur ou égal à x".

- ◇ Pour $I \subset \mathbb{R}$, on note $[X \in I] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in I\}$: il s'agit de l'événement "la valeur de X appartient à l'ensemble I".

On introduit également les notations analogues $[X < x]$, $[X \geqslant x]$ et $[X > x]$.

Exemples.

1. Dans l'exemple du jeu de dé : $[X = -1] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = -1\} = \{1, 2, 3\}$,
   $[X > 0] = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) > 0\} = \{6\}$.
2. Dans l'exemple de la somme des deux dés, $[X = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$,
   $[X \leqslant 3] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

Proposition - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

Si X est une v.a.r. et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$[X = x_1],\ [X = x_2],\ \dots,\ [X = x_n]$$

forment un système complet d'événements, appelé *système complet associé à la variable aléatoire X*.

Exemples.

1. Dans l'exemple du jeu de dé, $[X = -1]$, $[X = 0]$ et $[X = 2]$ forment le système complet associé à X.
2. Dans l'exemple de la somme de deux dés, la famille $\big([X = 2], [X = 3], \dots, [X = 11], [X = 12]\big)$ est le système complet d'événements associé à X.

Exemple. Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On réalise deux tirages avec remise d'une boule dans cet urne et on appelle Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches obtenues. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. En notant B_k : "on obtient une boule blanche au k-ème tirage", on peut décrire l'événement $[Y = 1]$:

$$[Y = 1] = (B_1 \cap \overline{B}_2) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2).$$

2. Loi d'une variable aléatoire finie

Notation. Si X est une v.a.r. et $x \in X(\Omega)$, on note $\mathbb{P}(X = x)$ au lieu de $\mathbb{P}([X = x])$.

Définition - Loi d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie. Déterminer la loi de X, c'est déterminer :

- son univers image $X(\Omega)$,
- $\mathbb{P}(X = x)$ pour chaque x de $X(\Omega)$.

Proposition - Somme des probabilités

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que $[X = x_1]$, …, $[X = x_k]$ forment un système complet d'événements. □

Exemples.

1. *Jeu de dés.* On a vu que $X(\Omega) = \{-1, 0, 2\}$. On a par ailleurs $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$,
$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{4, 5\}) = \frac{1}{3}$,
$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$.
2. *Somme de deux dés.* On a vu que $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$. On a
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36},\ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36},\ \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{36},\ \mathbb{P}(X = 5) = \frac{4}{36},\ \mathbb{P}(X = 6) = \frac{5}{36},\ \mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36}$$
$$\mathbb{P}(X = 8) = \frac{5}{36},\ \mathbb{P}(X = 9) = \frac{4}{36},\ \mathbb{P}(X = 10) = \frac{3}{36},\ \mathbb{P}(X = 11) = \frac{2}{36},\ \mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}.$$
3. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu sur le dé. On considère $Y = (X - 3)^2$. Ainsi, $Y = f(X)$ où $f : x \mapsto (x - 3)^2$.
   - ◇ $Y(\Omega) = \{0, 1, 4, 9\}$.
   - ◇ $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$,
   $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}([X = 2] \cup [X = 4]) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{3}$,
   $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}([X = 1] \cup [X = 5]) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{3}$,
   $\mathbb{P}(Y = 9) = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}$.

II Espérance d'une variable aléatoire finie

1. Définition

Définition - Espérance

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. L'espérance de X est le réel noté $\mathbb{E}(X)$ défini par
$$\mathbb{E}(X) \ = \ x_1\,\mathbb{P}(X = x_1) + \ldots + x_n\,\mathbb{P}(X = x_k) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x).$$
Dans le cas où $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est *centrée*.

Remarques.

- Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \ldots, p_n$, alors
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i \ = \ x_1\,p_1 + \ldots x_n\,p_n \ = \ \frac{x_1\,p_1 + \ldots x_n\,p_n}{p_1 + \ldots p_n}.$$
Il s'agit de la moyenne pondérée des x_i. L'espérance de X est donc intuitivement la “valeur moyenne” prise par X.

– On remarque que l'espérance d'une variable aléatoire X ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires ayant la même loi ont même espérance. On parle donc aussi d'espérance d'une loi de probabilité donnée.

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu sur le dé. L'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{6} k\,\mathbb{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} \;=\; \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k \;=\; \frac{1}{6}\cdot\frac{6\times 7}{2} \;=\; \frac{7}{2}.$$

Exercice 1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega)=\{-3,2,4\},\quad \mathbb{P}(X=-3)=\frac{1}{3},\quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(X=4)=\frac{1}{6}.$$

2. Théorème de transfert

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu sur le dé. Comme précédemment, on considère $Y=(X-3)^2$. On a vu que $Y(\Omega)=\{0,1,4,9\}$, donc

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; 0\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=0)}_{=\mathbb{P}(X=3)} \;+\; 1\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=1)}_{=\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)} \;+\; 4\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=4)}_{=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=5)} \;+\; 9\times\underbrace{\mathbb{P}(Y=9)}_{=\mathbb{P}(X=6)}.$$

Donc on a finalement aussi
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) \;=\;& (1-3)^2\,\mathbb{P}(X=1)+(2-3)^2\,\mathbb{P}(X=2)+(3-3)^2\,\mathbb{P}(X=3)\\ &+(4-3)^2\,\mathbb{P}(X=4)+(5-3)^2\,\mathbb{P}(X=5)+(6-3)^2\,\mathbb{P}(X=6).\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{6}(x_k-3)^2\,\mathbb{P}(X=x_k)$. Ce résultat se généralise, et porte le nom de formule de transfert.

Théorème - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ et g une fonction réelle. On a

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\,\mathbb{P}(X=x_k).$$

Exemples. Deux cas particuliers importants :

1. Si g est la fonction carrée, alors $\quad \mathbb{E}\big(X^2\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\mathbb{P}(X=x_k).$

   L'espérance de X^2 est aussi appelée *moment d'ordre* 2 de la variable aléatoire X.

2. Si g est la fonction affine $x\mapsto ax+b$ avec a,b réels alors

$$\mathbb{E}\big(aX+b\big) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)\,\mathbb{P}(X=x_k) \;=\; a\sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathbb{P}(X=x_k) \;+\; b\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_k) \;=\; a\,\mathbb{E}(X)+b.$$

Proposition - Variable aléatoire centrée associée à X

Si X est une variable aléatoire réelle alors la variable aléatoire $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée et est appelée *variable aléatoire centrée associée à X*.

Démonstration. D'après le deuxième exemple ci-dessus, on a $\mathbb{E}\big(X-\mathbb{E}(X)\big) \;=\; \mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X) \;=\; 0.$ □

3. Propriétés de l'espérance

Proposition - Linéarité de l'espérance (admise)

Soient deux variables aléatoires réelles finies X et Y. Pour tous réels a et b, $aX + bY$ est une variable aléatoire réelle finie, et on a
$$\mathbb{E}(aX + bY) \;=\; a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y).$$

Proposition - Positivité et croissance de l'espérance

i. Soit X une variable aléatoire réelle finie *positive*, c'est-à-dire telle que les valeurs qu'elle peut prendre sont toutes positives : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Alors, on a
$$\mathbb{E}(X) \;\geqslant\; 0.$$

ii. Soient deux variables aléatoires réelles finies X et Y. On suppose que $X \leqslant Y$, c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors, on a
$$\mathbb{E}(X) \;\leqslant\; \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration.

i. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \geqslant 0$ comme somme de réels positifs.

ii. Si $Y \geqslant X$, alors la variable aléatoire $Y - X$ est positive, donc le point précédent donne que $\mathbb{E}(Y - X) \geqslant 0$. La linéarité de l'espérance donne alors
$$\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}(Y - X) \;\geqslant\; 0, \quad \text{soit} \quad \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X). \quad \square$$

III Variance d'une variable aléatoire finie

1. Définition

Définition - Variance et écart-type d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire réelle finie. On définit la *variance* de X, notée $\mathbb{V}(X)$, par
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\right).$$

On appelle *écart-type* de X, noté $\sigma(X)$, le réel
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Si $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que la variable aléatoire X est *réduite*.

Remarques.

- La variance est toujours positive, en tant qu'espérance d'une variable aléatoire positive.
- La variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs la variable aléatoire par rapport à son espérance. Si la variance est faible, les valeurs sont proches de l'espérance. Si la variance est élevée, les valeurs sont très dispersées.
- Comme l'espérance, la variance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi. On parle donc de la variance d'une loi de probabilité donnée.

Calcul de la variance. Par le théorème de transfert, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors
$$\mathbb{V}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - \mathbb{E}(X)\big)^2\, \mathbb{P}(X = x_k).$$

Toutefois, en pratique, le calcul de la variance s'effectue souvent avec le résultat suivant.

Proposition - Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle finie. On a
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Démonstration. Par la linéarité de l'espérance, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\big(2\,\mathbb{E}(X)X\big) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \qquad \text{car } \mathbb{E}\big(2\,\mathbb{E}(X)X\big) = 2\,\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad \square\end{aligned}$$

Calcul de la variance. En utilisant le théorème de transfert, on peut récrire la formule de Koenig-Huygens de la manière suivante : si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\,\mathbb{P}(X = x_k) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu sur le dé. On a vu ci-dessus que $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$. Ainsi, on a
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{6} k^2\,\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\times 7\times 13}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

2. Propriétés de la variance

Proposition - Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire réelle finie et a, b deux réels. Alors
$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

On a donc aussi $\sigma(aX+b) = a\,\sigma(X)$.

Démonstration. On a $\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left(\left(aX+b-\mathbb{E}(aX+b)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(aX+b-a\,\mathbb{E}(X)-b\right)^2\right)$. Ainsi,
$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\left(\left(a(X-\mathbb{E}(X))\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\,\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\,\mathbb{V}(X). \quad \square$$

Remarque. En particulier, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors
- ⋄ $\mathbb{V}(aX) = a^2\,\mathbb{V}(X)$, et en particulier $\mathbb{V}(-X) = \mathbb{V}(X)$,
- ⋄ $\mathbb{V}(X+b) = \mathbb{V}(X)$.

Proposition - Variable aléatoire centrée réduite associée à X

Si X est une variable aléatoire réelle avec $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire
$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$
est centrée réduite et est appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à X*.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\diamond\ \mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\mathbb{E}\big(X-\mathbb{E}(X)\big) = 0.$$

$$\diamond\ \mathbb{V}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2}\mathbb{V}\big(X-\mathbb{E}(X)\big) = \frac{1}{\sigma(X)^2}\mathbb{V}(X) = 1. \quad \square$$

IV Lois usuelles

1. Loi de Bernoulli

Expérience associée. On effectue une expérience qui a deux issues possibles, qu'on appelle *succès* ou *échec*. On dit qu'il s'agit d'une *épreuve de Bernoulli*.

Une variable aléatoire de Bernoulli vaut 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec.

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli de paramètre* p si

- ⋆ $X(\Omega) = \{0,1\}$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X=1) = p$, et donc $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemples.

1. On lance une pièce équilibrée. La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on obtient *Pile*, et qui prend la valeur 0 si on obtient *Face*, suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
2. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on fait un 6, et qui prend la valeur 0 sinon, suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathcal{B}(p)$

Soit $p \in [0,1]$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors,

$$\mathbb{E}(X) = p,$$
$$\mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Démonstration.

$$\diamond\ \mathbb{E}(X) = 0\,\mathbb{P}(X=0) + 1\,\mathbb{P}(X=1) = 0\times(1-p) + 1\times p = p,$$

$$\diamond\ \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0^2\,\mathbb{P}(X=0) + 1^2\,\mathbb{P}(X=1) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p). \quad \square$$

2. Loi binomiale

Expérience associée. On effectue n épreuves de Bernoulli identiques indépendantes de probabilité de succès p, et on compte le nombre de succès.

Définition - Loi binomiale

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Une variable aléatoire X suit la *loi binomiale de paramètres n et p* si

- ⋆ $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$,
- ⋆ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarques.

– D'après la formule du binôme de Newton, on a bien

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; (p+1-p)^n \;=\; 1.$$

– Une loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres 1 et p : $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$.

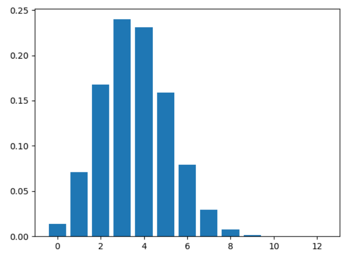

Diagramme en bâtons de $\mathcal{B}(12, 0{,}3)$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathcal{B}(n,p)$

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors,

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np\,(1-p).$$

Démonstration.

- On rappelle que d'après la formule du capitaine $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \;&=\; \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&=\; n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&=\; n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l+1}(1-p)^{n-(l+1)} \\
&=\; np\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l}(1-p)^{n-1-l} \;=\; np,
\end{aligned}$$

  par la formule du binôme de Newton.

- On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \;&=\; n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} kp^k(1-p)^{n-k} \\
&=\; n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} (l+1)p^{l+1}(1-p)^{n-(l+1)} \\
&=\; np\left(\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} lp^{l}(1-p)^{n-1-l} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l}(1-p)^{n-1-l}}_{=1}\right) \\
&=\; np\sum_{l=1}^{n-1} (n-1)\binom{n-2}{l-1} p^{l}(1-p)^{n-1-l} \;+\; np \\
&=\; np(n-1)\underbrace{\sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} p^{m+1}(1-p)^{n-2-m}}_{=p\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}p^m(1-p)^{n-2-m}=p} \;+\; np \\
&=\; np^2(n-1)+np \;=\; (np)^2 - np^2 + np.
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \;=\; (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 \;=\; np(1-p).$ □

Remarque. Pour compter les succès au cours de n épreuves de Bernoulli indépendantes, on peut aussi associer à chacune de ces épreuves une v.a.r. X_i (où $i \in \{1, \dots, n\}$) qui vaut 0 en cas d'échec, et 1 en cas de succès. Ainsi, les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. On obtient alors le nombre de succès X en sommant les résultats obtenus :

$$X = X_1 + \dots + X_n.$$

On peut alors voir qu'on a bien $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, autrement dit X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Cette remarque importante nous permet de retrouver aisément que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = p + \dots + p = np,$$

par la linéarité de l'espérance.

Nous verrons lorsque nous évoquerons l'indépendance de v.a.r. que lorsque les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots \mathbb{V}(X_n)$, ce qui permettra de retrouver aussi que $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

3. Lois uniformes

Définition - Loi uniforme $\mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une v.a.r. suit la loi *uniforme sur* $[\![1, n]\!]$ si

- $\star$ $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$,
- $\star$ Pour tout $k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$.

Remarque. La loi uniforme est la loi de l'équiprobabilité. On la reconnaît lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$, les événements $[X = x]$ ont même probabilité.

Exemples.

1. On lance un dé équilibré à 6 Faces. La variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée suit la loi $\mathcal{U}\big([\![1, 6]\!]\big)$.
2. On pioche une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. La variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée suit la loi $\mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}\big([\![1, n]\!]\big)$. Alors,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Démonstration.

- On a $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
- On a

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\,\mathbb{P}(X = k) - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

On peut généraliser la définition précédente au cas où une v.a.r. prend ses valeurs dans un intervalle d'entiers $[\![a, b]\!]$ quelconque.

Définition - Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$

Si a et b sont deux entiers tels que $a<b$, on dit qu'une v.a.r. X suit la loi *uniforme sur* $\llbracket a,b \rrbracket$ si

- ⋆ $X(\Omega)=\llbracket a,b \rrbracket$,
- ⋆ Pour tout $k\in\llbracket a,b \rrbracket, \mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{b-a+1}$.

On note alors $X\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$.

En remarquant qu'une v.a.r. X prend ses valeurs dans $\llbracket a,b \rrbracket$ si et seulement si $X-a+1$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1,b-a+1 \rrbracket$, on obtient la proposition suivante.

Proposition

Si a et b sont deux entiers tels que $a<b$, alors

$$X\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket) \quad\Leftrightarrow\quad X-a+1\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 1,b-a+1 \rrbracket).$$

Cette proposition permet de trouver aisément les formules de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ si $X\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$

Si a et b sont deux entiers tels que $a<b$ et $X\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$, alors,

$$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède, on a $\mathbb{E}(X-a+1)=\frac{b-a+2}{2}$. Or la linéarité de l'espérance donne $\mathbb{E}(X-a+1)=\mathbb{E}(X)-a+1$, donc
$$\mathbb{E}(X) \;=\; \mathbb{E}(X-a+1)+a-1 \;=\; \frac{b-a+2}{2}+a-1 \;=\; \frac{a+b}{2}.$$
- On sait que $\mathbb{V}(X-a+1)=\mathbb{V}(X)$, or on a $\mathbb{V}(X-a+1)=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$, d'où le résultat. □

4. Variable aléatoire certaine

Définition - Variable certaine

Une variable aléatoire est *certaine* si elle ne prend qu'une seule valeur, c'est-à-dire que $X(\Omega)$ est un singleton : $X(\Omega)=\{a\}$. On a alors $\mathbb{P}(X=a)=1$.

Proposition - Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine

Si X est certaine, avec $X(\Omega)=\{a\}$, alors $\mathbb{E}(X)=a$ et $\mathbb{V}(X)=0$.

Proposition - Cas de la variance nulle

Si X est une v.a.r. telle que $\mathbb{V}(X)=0$, alors il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}(X=a)=1.$$

On dit alors que X est une variable presque certaine.

Démonstration. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont tous distincts. Par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \mathbb{E}(X)\right)^2 \mathbb{P}(X = x_k) \;=\; 0.$$

Comme chacun des termes de la somme est positif et que la somme est nulle, on en déduit que tous les termes sont nuls, c'est-à-dire que $\left(k - \mathbb{E}(X)\right)^2 \mathbb{P}(X = x_k) = 0$ pour tout k. Par conséquent, pour tout k,

$$\text{si } \mathbb{P}(X = x_k) \neq 0, \text{ alors } x_k = \mathbb{E}(X).$$

Finalement, il y a une seule valeur x_k possible pour laquelle $\mathbb{P}(X = x_k) \neq 0$, il s'agit de $\mathbb{E}(X)$. On en déduit que $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. □

5. Simulations de variables aléatoires

En Pyhton, la librairie `numpy.random` est dédiée aux simulations de variables aléatoires. On l'importera avec l'instruction suivante : `import numpy.random as rd`.

La fonction `rd.random` ou `rd.rand` renvoie un réel au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette valeur est obtenue au moyen d'un générateur pseudo-aléatoire dont on ne parlera pas plus ici.

Les différentes syntaxes de `rd.random` :

- ⋆ `rd.random()` renvoie un réel aléatoire dans $[0, 1]$.
- ⋆ `rd.random(n)` renvoie n réels aléatoires dans $[0, 1]$, sous la forme d'un vecteur-ligne (de la classe `numpy.ndarray`).
- ⋆ `rd.random([n,p])` renvoie une matrice de taille $n \times p$ contenant np réels aléatoires dans $[0, 1]$.

Remarque : Pour tous réels a et b de $[0, 1]$ tels que $a < b$, la probabilité que le réel renvoyé par `rd.random()` soit compris entre a et b vaut $b - a$. On en déduit le principe important suivant :

Simuler un événement.

Pour tout réel p de $[0, 1]$, l'instruction `rd.random()<p` renvoie un booléen qui prend la valeur `True` avec la probabilité p, et la valeur `False` avec la probabilité $1 - p$. De même pour l'instruction `rd.random()<=p`.

Ces instructions permettent de *simuler* un événement de probabilité p, et par extension une variable aléatoire finie. En d'autres termes, il s'agit de donner une valeur qu'une v.a.r. X peut prendre, en respectant la probabilité qu'elle soit prise par X.

Exercice 2. Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. Compléter le programme suivant pour qu'il simule le tirage d'une boule dans cette urne.

```
r = rd.random()
if ..... :
        print("La boule tirée est blanche")
else :
        print("La boule tirée est rouge")
```

Exemples. On suppose la librairie `numpy.random` importée sous le préfixe `rd`.

1. Les instructions

```
X=0
if rd.random()<p:
        X=1
```

simulent une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

2. Les instructions

```
X=0
for k in range(n):
        if rd.random()<p:
                X=X+1
```

simulent une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Variables aléatoires finies.

- ⋆ La commande `rd.randint(n)` simule la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$ avec $\in \mathbb{N}^*$.
- ⋆ La commande `rd.randint(a,b)` simule la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a < b$.
- ⋆ La commande `rd.binomial(n,p)` simule la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.