

Chapitre 12

Dérivation

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction réelle définie sur I .

On note $M(x)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

I Dérivabilité en un point

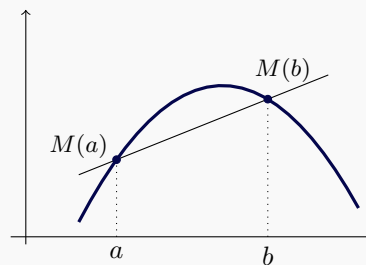
1. Définitions

Définition - Taux d'accroissement

Soient $a, b \in I$. On appelle *taux d'accroissement de f entre a et b* le réel

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement, c'est le coefficient directeur de la droite passant par les points $M(a)$ et $M(b)$.



Remarque. Intuitivement, si x représente le temps et $f(x)$ la distance parcourue au temps x , alors le taux d'accroissement correspond à une vitesse moyenne (la quantité $f(x) - f(x_0)$ est la distance parcourue entre x_0 et x , et $x - x_0$ est le temps écoulé).

Définition - Dérivabilité en un point, nombre dérivé

On dit que f est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie.}$$

Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et appelée *nombre dérivé de f en a* .

Exemples.

1. Une fonction constante f est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

Si $x \neq x_0$, on a $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, ainsi on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, donc f est dérivable en x_0 , et $f'(x_0) = 0$.

2. La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, et $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Si $x \neq x_0$, on a $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0}$, donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$.

3. La fonction $f : x \mapsto (x + 2)^2$ est dérivable en -1 , et $f'(-1) = 2$.

Si $x \neq -1$, on a $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{(x + 2)^2 - 1}{x + 1} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1}$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 2$.

4. La fonction racine $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Si $x > 0$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$.

Autre formulation. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

2. Dérivée à gauche et à droite en un point

Définition - Dérivée à droite et dérivée à gauche

- ★ On dit que f est *dérivable à droite* en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x admet une limite finie à droite quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée *nombre dérivé de f à droite* et notée $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- ★ On dit que f est *dérivable à gauche* en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement de f entre x_0 et x admet une limite finie à gauche quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée *nombre dérivé de f à gauche* et notée $f'_g(x_0)$:

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

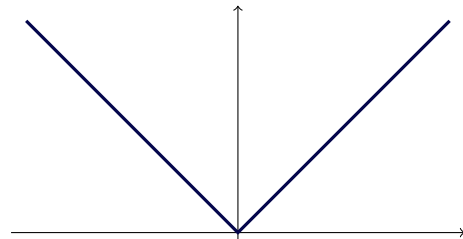
Remarques.

- Si f n'est pas définie à gauche de x_0 , alors la notion de dérivabilité à droite se confond avec la notion de dérivabilité (de même en échangeant *droite* et *gauche*).
- Si x_0 est un point de I qui n'est pas une extrémité, f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 , et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple. Etude de la dérivabilité en 0 de la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$:

- si $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$, donc $f'_g(0) = -1$.
- si $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1$, donc $f'_d(0) = 1$.

Ainsi, $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.



3. Tangente

Définition - Tangente à f en x_0

Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in I$. La droite d'équation

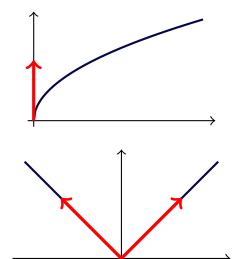
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

est appelée *tangente à la courbe de f en x_0* .

Il s'agit de la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$, passant par le point $(x_0, f(x_0))$.

Remarques.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, on dit que la courbe de f a une *tangente verticale* en x_0 , d'équation $x = x_0$.
Par exemple, la fonction racine admet une tangente verticale en 0.
- On définit de même la notion de tangente à droite et à gauche. Par exemple, dans le cas de la fonction valeur absolue, la tangente à gauche en 0 a pour équation $y = -x$, et la tangente à droite en 0 a pour équation $y = x$.

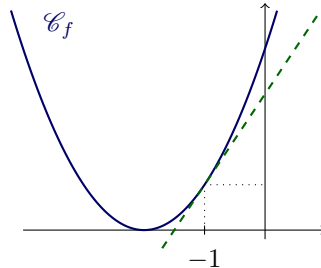


Exemple. On considère $f : x \mapsto (x+2)^2$.

1. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en -1 est $y = 2(x+1) + 1 = 2x + 3$.
2. Étude de la position relative de la tangente en -1 et de $\mathcal{C}_f$:

$$(x+2)^2 - (2x+3) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours *au-dessus* de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en -1 .



Proposition - Dérivabilité et continuité

Soient f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Démonstration. Pour $x \neq x_0$, on note $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$. On sait alors que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. Ainsi,

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Ainsi, on a bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, et f est continue en x_0 . □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, $x \mapsto |x|$ est continue en 0 , mais n'est pas dérivable en ce point.

4. Fonction dérivée

Définition - Fonction dérivée

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsque f est dérivable en tout point de I . On appelle *fonction dérivée* de f , l'application f' définie par :

$$\begin{aligned} f' &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

Remarque. D'après la proposition du paragraphe précédent, on a $\mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}(I)$.

5. Dérivées des fonctions usuelles

Théorème - Dérivabilité des fonctions usuelles

Les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition :

- les fonctions polynomiales, les quotients de fonctions polynomiales,
- les fonctions *logarithme népérien*, *exponentielle*, ainsi que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ (où α est un réel),
- les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, et arctan.

La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point sauf en 0 .

Les fonctions racines : $x \mapsto \sqrt{x}$ et plus généralement $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (avec n entier supérieur ou égal à 2) sont dérivables là où elles sont définies *sauf* en 0 .

Fonction $f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée $f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$ (fonction constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0 (fonction nulle)
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$a^x = e^{x \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x$	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$[x]$	$\mathbb{R}$	$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$	0
$ x $	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$

– Dérivation de $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}$: soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Par la formule de Bernoulli, on a pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k}}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-k} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.$$

On a donc bien montré que $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point x_0 , et que $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

– Dérivation de $\sin$: soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

On a vu par ailleurs dans le chapitre sur les limites que $\frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$. Par conséquent, on a aussi

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{h(\cos h + 1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, on a $\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x_0$, donc $\sin$ est dérivable en tout x_0 , et $\sin'(x_0) = \cos x_0$.

Remarque. Les limites suivantes, vues dans le cours sur les limites, peuvent être retrouvées directement par dérivation :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

6. Opérations sur les dérivées

a. Opérations algébriques

Proposition - Linéarité de la dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. La fonction λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

ii. La fonction $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Ce résultat découle immédiatement des propriétés sur les limites vue précédemment.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{D}^1(I)$ est donc stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{D}^1(I)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in \mathcal{D}^1(I)$.

Exemple. Par linéarité, toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$: pour $a_0, \dots, a_n$ des réels,

$$\text{si } f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ alors pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = x \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 . La fonction fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Ainsi, si f et g sont dérivables sur un intervalle I , alors fg l'est aussi, et $(fg)' = f'g + fg'$ sur I .

Démonstration. Si $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Or on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ par continuité de f en x_0 , $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$ et $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(x_0)$. Finalement,

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \square$$

b. Composition

Proposition - Dérivée d'une composition

Soient f une fonction définie sur I , g une fonction définie sur $f(I)$ et $x_0 \in I$. On suppose que

i. f est dérivable en x_0 ,

ii. g est dérivable en $f(x_0)$.

Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) g'(f(x_0)).$$

Démonstration. On introduit la fonction

$$\varphi : y \mapsto \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{si } y \neq f(x_0), \\ g'(f(x_0)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on a $g(f(x)) - g(f(x_0)) = \varphi(f(x)) (f(x) - f(x_0))$ pour tout x , y compris $x = x_0$. Par conséquent,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Par dérivabilité de g en $f(x_0)$, on a $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} \varphi(y) = g'(f(x_0))$, donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(f(x)) = g'(f(x_0))$ par composition. Ainsi,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) f'(x_0). \quad \square$$

Exemple. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

Exercice 1. On considère la fonction $g : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $g'(x)$ pour tout réel x non nul.
2. Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0. Ce prolongement continu est-il dérivable en 0 ?

Proposition - Dérivation de l'inverse

Soit g une fonction dérivable en x_0 . Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est dérivable en x_0 . De plus, on a

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. Comme $g(x_0) \neq 0$, on sait par continuité de g qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \neq 0$, donc g est bien définie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

On peut écrire $\frac{1}{g} = h \circ g$, où $h : y \mapsto \frac{1}{y}$. Comme g est dérivable en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, h est dérivable en $g(x_0)$, donc on peut appliquer le théorème de dérivation : la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 , et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = (h \circ g)'(x_0) = g'(x_0) h'(g(x_0)) = g'(x_0) \left(-\frac{1}{g(x_0)^2}\right) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad \square$$

Proposition - Dérivation d'un quotient

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0 et $g'(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 , et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. On applique la formule de dérivation du produit aux fonctions f et $\frac{1}{g}$, dont on sait par ce qui précède qu'elles sont dérivables en x_0 , on obtient alors que $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 , et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad \square$$

c. Bilan

Les énoncés des deux parties précédentes restent vrais sur tout un intervalle si les hypothèses y sont vérifiées. Le tableau suivant résume les principaux résultats, dans le cas où u et v sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathcal{D}$.

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
$u + v$	$u' + v'$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda \times u'$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\{x \in \mathcal{D}, u(x) \neq 0\}$	$\{x \in \mathcal{D}, u(x) \neq 0\}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\{x \in \mathcal{D}, v(x) \neq 0\}$	$\{x \in \mathcal{D}, v(x) \neq 0\}$
$u^n, n \in \mathbb{N}$	$nu' \times u^{n-1}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\{x \in \mathcal{D}, u(x) \geq 0\}$	$\{x \in \mathcal{D}, u(x) > 0\}$
e^u	$u'e^u$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$\{t \in \mathcal{D}, u(x) > 0\}$	$\{t \in \mathcal{D}, u(x) > 0\}$

7. Bijection réciproque

Théorème - Dérivée de la bijection réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans J , et $x_0 \in I$. On note $y_0 = f(x_0)$. On suppose que

- i. f réalise une bijection de I sur J
- ii. f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$.

Alors, f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Démonstration. Si $y \in J \setminus \{y_0\}$, on a $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$.

Comme f est dérivable en x_0 , on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \text{ce qui donne} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = f'(x_0),$$

du fait que $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, par continuité de f^{-1} . Comme $f'(x_0) \neq 0$ par hypothèse, on a alors

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{donc on a bien} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

ce qui donne que f^{-1} est dérivable en y_0 , et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$. □

Remarques.

- Ainsi, si f est dérivable, strictement monotone et de dérivée non nulle sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

- Cette formule peut être retrouvée à partir de l'égalité $f^{-1} \circ f(x) = x$, valable pour tout réel $x \in I$.
- Graphiquement, les courbes représentant f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Cette symétrie transforme une tangente à la courbe représentative de f en x_0 de coefficient directeur $\lambda \neq 0$ en une tangente à la courbe représentative de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$ de coefficient directeur $1/\lambda$.



Méthode - Pour étudier la dérivabilité d'une réciproque

- Justifier que f est dérivable sur un intervalle à préciser, calculer sa dérivée.
- Déterminer les points x_0 tels que $f'(x_0) = 0$.
- Calculer les points $y_0 = f(x_0)$ correspondants.
- Appliquer le théorème : la fonction f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{f(x_0), f'(x_0) = 0\}$, et pour tout y dans ce domaine, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Exemple. Calcul de la dérivée de la fonction arctan.

La fonction arctan est la réciproque de $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, dont la dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \tan^2 x$.

On remarque que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $f'(x) \neq 0$. Ainsi, on sait que la bijection réciproque de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et on a par ailleurs pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(\arctan y)} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

II Applications de la dérivation

1. Extrema locaux et globaux

Définition - Extremum local, extremum global

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.

- ★ On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *global* en x_0 si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ★ On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[$, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- ★ On dit que f admet un *extremum global* (resp. *local*) en x_0 si f admet un maximum ou un minimum global (resp. local) en x_0 .

Remarques.

- Un extremum global est un extremum local, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.
- Il ne faut pas confondre le point x_0 où l'extremum est atteint et la valeur $f(x_0)$ de cet extremum.

Définition - Point critique

Soit f une fonction définie sur I et dérivable en un réel x_0 de I qui n'est pas une extrémité de I . On dit que x_0 est un *point critique* de f si $f'(x_0) = 0$.

Remarque. En un point critique, la courbe admet donc une tangente horizontale.

Théorème - Condition nécessaire d'optimalité

Soient f une fonction définie sur I et x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I . On suppose que f est dérivable en x_0 et f admet un extremum local en x_0 . Alors

$$f'(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire que x_0 est un point critique de f .

Démonstration. On démontre ce résultat dans le cas où f présente un minimum local en x_0 . Il existe alors $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f(x) \geq f(x_0)$ (il est toujours possible de choisir η suffisamment petit pour que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset I$, car x_0 n'est pas extrémité de I).

- Si $x \in [x_0 - \eta, x_0]$, alors $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 \leq 0$, donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Ainsi,

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

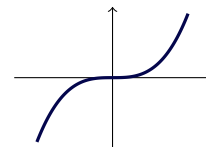
- Si $x \in]x_0, x_0 + \eta]$, alors $f(x) - f(x_0) \geq 0$ et $x - x_0 \geq 0$, donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Ainsi,

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Comme $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$, on a finalement $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$, donc $f'(x_0) = 0$. $\square$

Remarques.

- Ce théorème donne une condition nécessaire, mais pas suffisante. Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'admet pas d'extremum en 0.
- En revanche, lorsque f est dérivable sur I , si x_0 est un point critique de f et que f' change de signe en x_0 alors f atteint un extremum local en x_0 .
- Le résultat n'est valable que si x_0 n'est pas une extrémité de l'intervalle. Par exemple la fonction $g : x \mapsto x$ admet un maximum local en 1 sur $[0, 1]$ et un minimum local en 0 sur $[0, 1]$, mais aucun de ces points n'est un point critique.



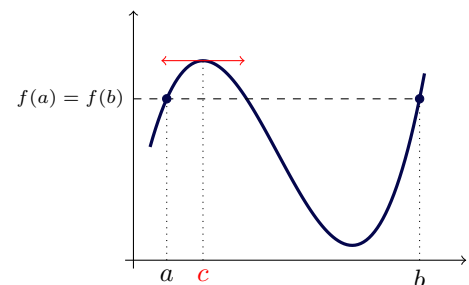
2. Théorème de Rolle

Théorème - Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarques.

- Le théorème est vrai dans le cadre général où f est dérivable sur $]a, b[$ et continue sur $[a, b]$. Il peut en particulier être utilisé dans le cas particulier où la fonction f est dérivable sur $[a, b]$: dans ce cas, la fonction est aussi continue sur $[a, b]$.
- Interprétation graphique : la courbe représentative de f possède (au moins) une tangente horizontale, et f admet (au moins) un extremum local sur $]a, b[$.



Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle y admet un minimum et un maximum, d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, il existe $c, d \in [a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

- Si c et d sont tous deux extrémités de $[a, b]$ alors la condition $f(a) = f(b)$ entraîne que f est constante sur $[a, b]$ (car son minimum est égal à son maximum). Par suite, n'importe quel élément de $]a, b[$ annule la dérivée de f .
- Sinon, l'un au moins de c ou de d n'est pas extrémité de l'intervalle $[a, b]$ et puisque f admet un extremum local en cet élément et y est dérivable, la dérivée de f s'y annule. $\square$

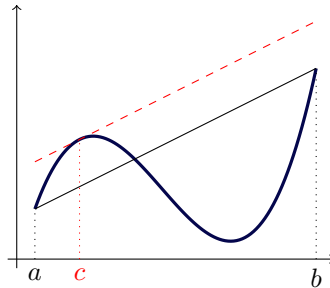
Exemple. Soit f une fonction polynomiale ayant deux racines réelles distinctes. Montrer que f' admet au moins une racine.

3. Egalité et inégalité des accroissements finis

Théorème - Egalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$. Il existe au moins un réel c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$



Remarques.

- Interprétation graphique : l'égalité $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ signifie que la courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
- Interprétation cinématique : la vitesse moyenne sur $[a, b]$ est égale à la vitesse instantanée pour un instant c bien choisi.

Par exemple, si une voiture a roulé en moyenne à 100 km/h entre deux instants a et b , elle a eu, à un instant c une vitesse instantanée de 100 km/h.

Démonstration. On introduit la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, car f l'est. On remarque par ailleurs que $g(a) = g(b) = f(a)$. Ainsi, par le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour tout $x \in]a, b[$, on a $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, donc $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, ce qui conclut. $\square$

Théorème - Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- i. S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, on a $m \leq f'(x) \leq M$, alors pour tous $a, b \in I$,

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

- ii. S'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$, alors pour tous $a, b \in I$,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Remarque. Interprétation cinématique : la vitesse moyenne entre deux instants a et b est comprise entre la plus petite vitesse instantanée et la plus grande vitesse instantanée.

Démonstration. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ (si $a = b$, le résultat est évident).

- i. La fonction f est dérivable sur I donc sur $[a, b]$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Comme $m \leq f'(c) \leq M$, ceci donne $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

ii. C'est une conséquence du point précédent : on a $-k \leq f'(x) \leq k$ pour tout $x \in I$, donc

$$-k(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq k(b-a), \quad \text{ce qui donne} \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b-a|. \quad \square$$

Exercice 2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $[n, n+1]$. Par ailleurs, comme pour tout $x \in [n, n+1]$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, on a :

$$\forall x \in [n, n+1], \quad \frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, l'inégalité des accroissements finis donne $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.

4. Variations

Proposition - Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- i. f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
- ii. f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
- iii. f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$.
- iv. Si f' est positive sur I et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I . En particulier, si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .
- v. Si f' est négative sur I et que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I . En particulier, si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration. Démontrons i. en raisonnant par double implication.

- Supposons que f est croissante sur I , et fixons $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, la croissance de f entraîne que $f(x) - f(x_0)$ est du même signe que $x - x_0$. Par conséquent, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. On a donc

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

On a donc bien montré que pour tout $x_0 \in I$, on a $f'(x_0) \geq 0$.

- Supposons que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Comme f est dérivable sur I , elle l'est également sur $[a, b]$, et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Comme $f'(c) \geq 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) \geq 0$. On a donc bien montré que pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$. En d'autres termes, f est croissante sur I .

Les points ii. et iii. se démontrent de manière analogue.

Examinons le point iv. : comme f' est positive, on sait d'après ce qui précède que f est croissante. Supposons qu'elle ne soit pas strictement croissante : on a donc deux points $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Par croissance, la fonction f est donc constante sur l'intervalle $[x, y]$. D'après le point iii., la fonction f' est donc nulle sur $[x, y]$. Elle s'annule alors en un nombre infini de points, ce qui est contradictoire.

Le point v. se démontre bien sûr de manière analogue. $\square$

Remarques.

- Cas de la stricte monotonie stricte : l'implication " $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante" est valable, mais pas sa réciproque. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R} : f'(0) = 0$.

-  Le théorème n'est pas vrai si I n'est pas un intervalle.

Exemples.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(e - e^{-\frac{1}{x}})$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\arctan x \leq x$.

5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et théorème de prolongement de la dérivée

Définition - Classe $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que, de plus, sa dérivée est continue sur I .

On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs réelles.

Théorème - Fonction usuelles de classe $\mathcal{C}^1$

Les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble où elles sont définies :

- les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (quotient de fonctions polynomiales),
- les fonctions *logarithme népérien*, *exponentielle*, ainsi que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ (où α est un réel),
- les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, et arctan.

La fonction $x \mapsto |x|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Les fonctions racines : $x \mapsto \sqrt{x}$ et plus généralement $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (avec n entier supérieur ou égal à 2) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition privé de 0.

Théorème - Opérations et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et λ un réel. Les fonctions λf , $f + g$, fg sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Si, de plus, g ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Soient $f : I \rightarrow J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J . Alors, la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Remarque. On a les implications suivantes :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \Rightarrow f \text{ est dérivable sur } I \Rightarrow f \text{ est continue sur } I.$$

Ce qui se note encore $\mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}(I)$. Toutes les réciproques sont fausses !

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et si $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc f est bien dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- Si $x \neq 0$, un calcul de dérivée donne $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$. Ainsi, $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$, ce qui entraîne que f' n'est pas continue en 0, et f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème - Théorème du prolongement de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $x_0 \in I$ et ℓ un réel. On suppose que

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{x_0\}$.
- f est continue en x_0 .

$$iii. \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(x_0) = \ell$.

Démonstration. Si $x \in I$ et $x < x_0$, alors f est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c_x \in]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x).$$

Comme $|c_x - x_0| \leq |x - x_0|$, on a $c_x \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} x_0$, l'hypothèse *iii.* implique que $f'(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \ell$. Finalement,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \ell.$$

On a donc montré que f est dérivable à gauche en x_0 , et $f'_g(x_0) = \ell$. On montre de même que f est dérivable à droite en x_0 , et $f'_d(x_0) = \ell$. Finalement, f est dérivable en x_0 , et $f'(x_0) = \ell$.

L'hypothèse *iii.* se réécrit alors

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Comme la fonction f' est supposée continue sur $I \setminus \{x_0\}$, elle est alors continue sur I . La fonction f est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . $\square$

Remarque. Ce théorème permet en particulier de montrer que f est dérivable en x_0 , sans passer par la limite du taux d'accroissement.

Exercice 3. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2x \ln x + x, \text{ donc } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0,$$

par croissances comparées. Ainsi, d'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $f'(0) = 0$.

Remarque. On montre de la même manière que si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 .