Chapitre 13

Polynômes

I Ensemble des polynômes à coefficients réels

1. Définition et notations

Définition - Polynôme

- On appelle polynôme à coefficients réels la donnée de $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, où $a_0, \dots, a_n$ sont des réels.

  On note alors le polynôme P ou $P(x)$, et on l'associe à la fonction polynomiale

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

  Si $a_n \neq 0$, on dit que $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont les *coefficients* du polynôme P. Le coefficient a_n est alors appelé *coefficient dominant* de P. On le notera parfois $\mathrm{c_{dom}}(P)$ dans ce cours.
- On note $\mathbb{R}[x]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- Si P est de la forme $P(x) = a_n x^n$, on dit que P est un *monôme*.

Exemples. $x^3 + 2$ et $x^4 - 5x + 1$ sont des polynômes, $3x^2$ est un monôme.

Remarques.

- Dorénavant, on ne fera pas la différence entre un polynôme P et sa fonction polynomiale associée.
- On s'autorise à noter le polynôme indifféremment P, $P(x)$ ou $P : x \mapsto P(x)$. À titre d'exemple, on parlera du polynôme $x^2 + 1$. Attention, cette notation n'est pas autorisée pour une fonction en général.

Définition - Polynôme nul

Si $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ avec $a_0 = \ldots = a_n = 0$, alors P est associé à la fonction polynomiale nulle.

On appellera polynôme nul tout polynôme P dont tous les coefficients sont nuls, et on notera alors $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ ou encore $P = 0$. Par abus, on dit que $0_{\mathbb{R}[x]}$ est le polynôme nul.

La proposition suivante assure que seul le polynôme nul est associé à la fonction nulle.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Si $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors les coefficients de P sont tous nuls.

Démonstration. Supposons que $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que P n'a pas tous ses coefficients nuls. On peut alors écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$. D'après l'hypothèse, on a $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^n} = 0$, mais on a aussi

$$\frac{P(x)}{x^n} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_n.$$

Par unicité de la limite, on a donc $a_n = 0$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, le polynôme P a tous ses coefficients nuls. □

2. Opérations sur les polynômes

Les opérations introduites pour les fonctions s'appliquent pour les fonctions polynomiales, donc pour les polynômes.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ⋆ *Addition* : $\big(P+Q\big)(x) = P(x) + Q(x)$.
- ⋆ *Multiplication par un scalaire* : $\big(\lambda P\big)(x) = \lambda P(x)$.
- ⋆ *Produit* : $\big(PQ\big)(x) = P(x)Q(x)$.
- ⋆ *Composition* : $P \circ Q(x) = P(Q(x))$.

On peut montrer que $P+Q$, λP, PQ, $P \circ Q$ sont encore des polynômes. La proposition ci-dessous donne d'ailleurs l'expression des coefficients du polynôme PQ.

Exemples.

1. Si $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ et $Q(x) = x^2 - 2x + 1$, alors
$$(P+2Q)(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 3, \quad \text{et} \quad (PQ)(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$
2. Si $P(x) = 2x + 5$ et $Q(x) = x^2 - 1$, alors
$$(P \circ Q)(x) = 2x^2 - 7, \quad \text{et} \quad (Q \circ P)(x) = (2x+5)^2 - 1 = 4x^2 - 20x + 24.$$

Remarque. Si $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, comme $PQ = QP$, donc les formules du binôme de Newton et de Bernoulli s'appliquent :
$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \qquad \text{et} \qquad P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}.$$

La proposition suivante donne l'expression des coefficients du polynôme PQ.

Proposition - Coefficients d'un produit de deux polynômes

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ tels que pour tout réel x, $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$.

Pour tout $i > n$, on pose $a_i = 0$ et pour tout $j > m$, $b_j = 0$. Le produit de P et Q est le polynôme PQ donné par
$$PQ(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \quad \text{avec pour tout } k \in [\![0, n+m]\!], \quad c_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}.$$

Remarque. On a alors $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, etc.

Nous avons vu qu'un polynôme est associé à une fonction polynomiale. La proposition suivante assure qu'en retour, une fonction polynomiale n'est associée qu'à un seul polynôme de $\mathbb{R}[x]$, à ajout près de coefficients nuls.

Proposition

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$. Si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors P et Q ont les mêmes coefficients non nuls.

Démonstration. Si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $(P-Q)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit alors que les coefficients du polynôme $P - Q$ sont nuls, ce qui conclut □

Remarque. On retiendra qu'on peut procéder par identification dans la manipulation des polynômes : si $P(x) = Q(x)$, alors les coefficients non nuls de P et de Q sont les mêmes.

3. Degré d'un polynôme

Définition - Degré d'un polynôme

- ⋆ Si $P \in \mathbb{R}[x]$ est de la forme $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, alors on dit que P est de degré n. On note
$$\deg P = n.$$

- ⋆ Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.
- ⋆ On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à n.

Remarques.

- Si $\deg P = n$, alors a_n est son coefficient dominant.
- Si le coefficient dominant de P vaut 1, on dit que P est *unitaire* (ou *normalisé*).

Exemples.

1. Un polynôme constant non nul est de degré 0.
2. Le polynôme $-3x^3 + 4x - 1$ est de degré 3. Son coefficient dominant est -3.
3. $\mathbb{R}_1[x] = \{ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, et $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

⚠ Si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on n'a pas forcément $\deg(P) = n$, c'est le cas seulement si $a_n \neq 0$. On a seulement $\deg P \leqslant n$.

Proposition - Opérations et degré

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$. On a alors

- ⋆ $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.
  - Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  - Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\mathrm{c}_{\mathrm{dom}}(P) + \mathrm{c}_{\mathrm{dom}}(Q) \neq 0$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- ⋆ $\deg(\lambda P) = \deg P$ si $\lambda \neq 0$.
- ⋆ $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- ⋆ $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$ si $\deg Q \geqslant 1$.

Remarques.

- Ces propriétés sont toutes cohérentes avec la convention $\deg(0) = -\infty$, en appliquant les opérations suivantes : si $\deg P = -\infty$, alors $\deg P + \deg Q = -\infty$, $\deg P \times \deg Q = -\infty$.
- ⚠ On n'a pas toujours $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$. Par exemple :
$$\text{si } P(x) = x^2 + 2x \text{ et } Q(x) = -x^2 + 2, \quad \text{alors} \quad (P + Q)(x) = 2x + 2, \text{ et } \deg(P + Q) = 1.$$
- Plus généralement, si $P_1, \dots, P_N$ sont des polynômes, alors
$$\deg\left(\sum_{i=1}^{N} P_i\right) \leqslant \max\{\deg(P_i),\ i \in [\![1, p]\!]\} \quad \text{et} \quad \deg\left(\prod_{i=1}^{N} P_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \deg(P_i).$$

Exemple. Déterminons le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(x) = (x - 2)^n - (x + 5)^n$.

Exercice 1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (2x + k)$.

Proposition - Intégrité de $\mathbb{R}[x]$

Si P et Q sont des polynômes, alors $PQ = 0 \Leftrightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$.

Démonstration. Si $P = 0$ ou $Q = 0$, on a bien sûr $PQ = 0$. Examinons maintenant la réciproque : si $PQ = 0$, alors on a $\deg(PQ) = -\infty$, ce qui se récrit $\deg P + \deg Q = -\infty$. Ceci n'est possible que si $\deg P = -\infty$ ou $\deg Q = -\infty$, c'est-à-dire si $P = 0$ ou $Q = 0$. □

Remarque. Cette propriété, que l'on utilise aussi lorsque l'on calcule avec des nombres réels, est bien sûr fausse lorsque l'on travaille avec des fonctions non polynomiales !

II Division euclidienne

Définition - Multiples et diviseurs

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$. On dit que B *divise* A, ou que A est *divisible* par B s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$ tel que

$$A = BQ.$$

On note $B \mid A$. Dans ce cas, on dit que A est un *multiple* de B et que B est un *diviseur* de A.

Exemple. Comme $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$,
- le polynôme $x - 1$ divise le polynôme $x^2 - 1$,
- le polynôme $x^2 - 1$ est un multiple du polynôme $x + 1$.

Exercice 2. Soient $A(x) = x^4 + 1$ et $B(x) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$. Montrer que B divise A.

Remarque. Si A est non nul et $B \mid A$, alors $\deg(B) \leqslant \deg(A)$.

Théorème - Existence et unicité de la division euclidienne (admis)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Les polynômes Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 3.

1. Déterminer le quotient et le reste dans la division de $2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$ par $x - 2$.
2. Déterminer le quotient et le reste dans la division de $2x^3 - x^2 - x + 2$ par $x^2 - 1$.
3. Déterminer le quotient et le reste dans la division de $x^4 - x^3 + x - 2$ par $x^2 - 2x + 4$.

Remarque. Si Q est le reste de la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[x]$ par $B \in \mathbb{R}[x]$ non nul, alors $\deg Q = \deg A - \deg B$.

En effet, comme $\deg R < \deg B \leqslant \deg(BQ)$, on a $\deg(BQ + R) = \deg(BQ)$, ce qui donne $\deg A = \deg B + \deg Q$, puis $\deg Q = \deg A - \deg B$.

Proposition

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ avec $B \neq 0$. B divise A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Démonstration. On écrit $A = BQ + R$, division euclidienne de A par B.

- Si $R = 0$, alors on a $A = BQ$, et $B \mid A$.
- Si $B \mid A$, alors il existe $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A = B\widetilde{Q}$. Par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, on a $Q = \widetilde{Q}$ et $R = 0$. Le reste de la division euclidienne de A par B est bien nul. □

Méthode - Montrer que B divise A

- ⋆ On peut raisonner par identification pour chercher Q tel que $A = BQ$.
- ⋆ On peut écrire la division euclidienne de A par B, et montrer que le reste est nul.

Remarque. Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $x - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, est $P(\alpha)$.

En effet, la division euclidienne de P par $x - \alpha$ s'écrit $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + R(x)$, avec $\deg R < \deg Q = 1$, donc R est constant. En prenant $x = \alpha$, on obtient que $P(\alpha) = R(\alpha)$. Comme R est constant, on a $R(x) = P(\alpha)$.

Plus généralement, si on connaît une racine α du polynôme B, alors le reste R dans la division euclidienne de A par B vérifie $R(\alpha) = P(\alpha)$. Ceci fournit parfois un moyen de trouver le reste sans effecteur la division euclidienne, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple. Déterminons le reste R dans la division euclidienne de $A(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$ par $B(x) = x^2 - 1$.

On sait que $\deg R < \deg B = 2$, donc R est de la forme $R(x) = ax + b$. Par ailleurs, comme on a $B(1) = B(-1) = 0$, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} R(1) = P(1) = 2 \\ R(-1) = P(-1) = 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ -a + b = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, $R(x) = x + 1$.

III Polynôme dérivé

1. Définition et premières propriétés

Définition - Polynôme dérivé

- ⋆ Soit $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ avec $\deg P \geqslant 1$. On appelle *polynôme dérivé* de P le polynôme P' défini par

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

- ⋆ Si P est un polynôme constant, le *polynôme dérivé* de P, noté P' est le polynôme nul.

Remarque. La fonction polynomiale associée à P' est donc bien la dérivée de la fonction polynomiale associée à P. Ainsi, les propriétés de la dérivation des fonctions sont vérifiées par les polynômes : si P, Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

i. $P' = 0 \iff P$ est un polynôme constant,

ii. *linéarité* : $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$,

iii. *produit et composée* : $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Proposition - Degré du polynôme dérivé

Si $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Démonstration. Si $n = \deg P \geqslant 1$, alors P s'écrit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$. Ainsi, $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$. Par conséquent, comme $n a_n \neq 0$, $\deg P' = n - 1 = \deg P - 1$. □

Exercice 4. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $(P')^2 = 4P$ et $\deg P \geqslant 1$.

Solution. Analyse. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ non constant tel que $(P')^2 = 4P$. On a alors $\deg(P')^2 = \deg(4P)$. Or $\deg(4P) = \deg P$, et $\deg((P')^2) = \deg P' + \deg P' = 2 \deg P - 2$.

Par conséquent, on a $2 \deg P - 2 = \deg P$, ce qui donne $\deg P = 2$. On peut alors écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Ainsi, $(P')^2 = 4P$ se récrit $4a^2 x + 4abx + b^2 = 4ax^2 + 4bx + 4c$. Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{l} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{array}\right. \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b^2 = 4c \end{array}\right.$$

On en déduit que P est de la forme $P(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$, pour $b \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Réciproquement, on vérifie sans peine que tous les polynômes de cette forme sont solutions.

Définition - Dérivées d'ordre supérieur d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On définit les dérivées successives de P par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Exemples.

– Calcul des dérivées successives du polynôme $P(x) = -3x^3 + x^2 - x + 2$: on a

$$P'(x) \;=\; -9x^2 + 2x - 1, \qquad P''(x) \;=\; -18x + 2, \qquad P^{(3)}(x) \;=\; -18, \qquad P^{(4)}(x) \;=\; 0.$$

– Calcul des dérivées successives de $P_n(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n'(x) \;=\; nx^{n-1}, \quad P_n''(x) \;=\; n(n-1)x^{n-2}, \quad P_n^{(3)}(x) \;=\; n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

Si $k \leqslant n$, on a donc $P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. Par ailleurs, $P_n^{(n+1)} = 0$.

Ce dernier résultat est synthétisé dans la proposition suivante.

Proposition - Dérivées successives d'un monôme

Soient n et k deux entiers naturels, on considère le monôme $P_n(x) = x^n$. Alors,

$$P_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Remarque. On note que si $k \leqslant n$, alors $\deg P_n^{(k)} = n - k$. En particulier, le polynôme $P_n^{(n)}$ est un polynôme constant, égal à $n!$.

On en déduit le résultat suivant.

Proposition - Dérivées successives d'un polynôme

Soit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme de degré n.

i. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P^{(k)} = n - k$ et le polynôme $P^{(k)}$ est donné par,

$$P^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} a_i x^{i-k}.$$

En particulier : $P^{(n)}(x) = n!\,a_n$.

ii. Pour tout entier $k \geqslant n+1$, $P^{(k)} = 0$.

Remarque. En considérant la formule ci-dessus avec $x = 0$, on obtient que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P^{(k)}(0) \;=\; k!\,a_k, \quad \text{donc} \quad a_k \;=\; \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

On en déduit donc que P se récrit $P(x) \;=\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \;=\; P(0) \;+\; P'(0)\,x \;+\; \frac{P''(0)}{2}\,x^2 \;+\; \dots \;+\; \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n.$

2. Formule de Taylor

La formule de la fin du paragraphe suivant est connue sous le nom de formule de Taylor pour les polynômes au point 0. Nous en voyons ci-dessous une généralisation à tout point $a \in \mathbb{R}$.

Théorème - Formule de Taylor

Soit P un polynôme de degré n. Pour tous réels a et x, on a

$$P(x) \;=\; P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

En d'autres termes, pour tous réels a et x, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Démonstration. Nous avons déjà démontré la formule dans le cas où $a = 0$ dans la remarque du paragraphe précédent. Nous allons en déduire la formule dans le cas général. Posons $Q(x) = P(x+a)$, ce qui entraîne que $P(x) = Q(x-a)$. On observe que $Q'(x) = P'(x+a)$, et plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x+a)$. En particulier, $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La remarque du paragraphe précédent appliquée à Q donne que

$$Q(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,x^k.$$

Ainsi, $P(x) \;=\; Q(x-a) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$. □

IV Racines et multiplicité

1. Racines d'un polynôme

Définition - Racine

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Une *racine* (ou un zéro) de P est un réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

Exemples.
- ⋆ $x - \alpha \in \mathbb{R}[x]$ a α pour unique racine,
- ⋆ $5 \in \mathbb{R}[x]$ n'a pas de racine,
- ⋆ $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ n'a pas de racine,
- ⋆ $0 \in \mathbb{R}[x]$ a une infinité de racines.

Proposition - Factorisation et racines

1. Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et α un réel.
$$\alpha \text{ est racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (x-\alpha) \text{ divise } P,$$
c'est-à-dire que α est racine de P si et seulement si P est de la forme $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$, où $Q \in \mathbb{R}[x]$.
2. Plus généralement, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des réels deux à deux distincts, alors
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ sont des racines de } P \quad \Leftrightarrow \quad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_r) \text{ divise } P.$$

Démonstration.
1. Nous avons vu que le reste dans la division euclidienne de P par le polynôme $(x-\alpha)$ est donné par $P(\alpha)$. Ainsi, on a
$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{le reste dans la division euclidienne de } P \text{ par } (x-\alpha) \text{ est nul} \quad \Leftrightarrow \quad (x-\alpha)|P.$$
2. Il est clair que si $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_r)$ divise P, alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des racines de P.
Supposons maintenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont des racines de P. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, le polynôme $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)$ divise P.
   - *Initialisation.* Comme α_1 est racine, le point précédent assure que $(x-\alpha_1)$ divise P.
   - *Hérédité.* Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$. On suppose que $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)$ divise P. On sait alors que P s'écrit $P(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$, avec $Q \in \mathbb{R}[x]$. Comme $P(\alpha_{k+1}) = 0$ et $(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\ldots(\alpha_{k+1}-\alpha_k) \neq 0$, on a $Q(\alpha_{k+1}) = 0$, donc Q s'écrit $Q(x) = (x-\alpha_{k+1})\widetilde{Q}(x)$ avec $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi, $P(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{k+1})\widetilde{Q}(x)$.

   Par récurrence on a donc bien le résultat souhaité. En particulier, $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_r)$ divise P. □

Méthode - Factorisation d'un polynôme

Pour factoriser un polynôme P, on peut procéder de la manière suivante.

1. Chercher des racines évidentes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.
2. Effectuer la division euclidienne de P par $\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)$.
3. Factoriser le quotient.

Exercice 5. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$.

Proposition - Nombre maximal de racines

Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ est non nul, alors il admet au plus n racines distinctes.

Démonstration. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors on sait que $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)$ divise P. On en déduit que $\deg\big((x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)\big) \leqslant \deg P$. Comme $\deg(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k) = \deg(x-\alpha_1)+\dots+\deg(x-\alpha_k) = k$, on a donc $k \leqslant \deg P \leqslant n$. Ainsi, on a bien montré qu'il y avait au plus n racines distinctes. □

Remarques.

- On utilise souvent la contraposée de ce résultat : si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
- En particulier, un polynôme qui admet une infinité de racines est toujours nul.

Corollaire

Si $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sont des réels distincts et $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ vérifient $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, alors $P = Q$.
En d'autres termes, si P et Q sont de degré au plus n et coïncident en $n+1$ points distincts, alors ils sont égaux.

Démonstration. Si $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, alors le polynôme $P-Q \in \mathbb{R}_n[x]$ a pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, qui sont des réels distincts. Ainsi, $P-Q$ est nul, ce qui donne $P = Q$. □

Exercice 6. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

2. Multiplicité

Définition - Multiplicité d'une racine

- Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P. On dit que α est de multiplicité $m \in \mathbb{N}^\star$ si m est le plus grand entier tel que $(x-\alpha)^m$ divise P :
$$(x-\alpha)^m \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (x-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$
Autre formulation : il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
- Si $m = 1$, on dit que α est une racine *simple*, sinon, on dit que α est une racine *multiple*. Dans le cas où $m = 2$, on dira que la racine est *double*.

Exemple. On considère le polynôme $P(x) = (x-2)^5(x^2+1)$. On constate que 2 est racine de P, de multiplicité 5. En effet, $(x-2)^5$ divise P, et 2 n'est pas racine de x^2+1.

Proposition - Caractérisation de la multiplicité

Si $P \in \mathbb{R}[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^\star$, alors α est racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

⚠ Avoir $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ ne suffit pas pour conclure que la multiplicité de la racine α de P vaut m : on peut seulement en déduire qu'elle est *supérieure ou égale* à m.

Exemple. Le polynôme $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$ a pour racine 2, qui est de multiplicité 2.

On a $P(2) = 0$, donc 2 est bien racine de P. Par ailleurs, comme on a $P'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$ et $P''(x) = 12x^2 - 18x + 2$, on obtient que $P'(2) = 0$ et $P''(2) = 14 \neq 0$.

Par conséquent, on a $P(2) = P'(2) = 0$, et $P''(2) \neq 0$, ce qui assure que la racine 2 a pour multiplicité 2.

Une adaptation de la preuve de la proposition du paragraphe précédent sur le lien entre factorisation et racines fournit alors le résultat suivant.

Proposition - Factorisation et racines

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont racines de P deux à deux distinctes, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, alors le polynôme $(x - \alpha_1)^{m_1} \ldots (x - \alpha_p)^{m_p}$ divise P. En d'autres termes, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$P(x) = Q(x) \prod_{i=1}^{p} (x - \alpha_i)^{m_i},$$

et $Q(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Remarque. On peut donc adapter la méthode précédente de factorisation d'un polynôme P en cherchant des racines évidentes α_k ainsi que leur multiplicité m_k afin de factoriser par $\prod\limits_{k=1}^{p} (x - \alpha_k)^{m_k}$.

Exercice 7. Factoriser $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$.

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité, c'est-à-dire que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont racines distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$, alors $m_1 + \ldots + m_p \leqslant n$.

En particulier, seul le polynôme nul possède une infinité de racines.

Méthode - Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut

- ⋆ montrer que tous ses coefficients sont nuls,
- ⋆ montrer que le polynôme admet strictement plus de racines comptées avec multiplicité que son degré,
- ⋆ montrer que le polynôme admet une infinité de racines.

Exercice 8. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(0) = 0$ et, pour tout réel x, $P(x) = P(\sin x)$.

3. Relations coefficients-racines

La proposition suivante établit un lien bien utile entre les coefficients d'un polynôme de degré 2 et ses racines réelles lorsqu'il en a.

Proposition - Relations coefficients racines pour un polynôme de degré 2

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$) de discriminant positif. Alors

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont les racines de } P \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 & = & -\frac{b}{a}, \\ \alpha_1\alpha_2 & = & \frac{c}{a}. \end{array} \right.$$

Démonstration. Si le discriminant est positif, on sait que le polynôme P s'écrit $P(x) = \alpha(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et α_1, α_2 sort les racines (éventuellement confondues) de P. On a alors $ax^2 + bx + c = \alpha x^2 - \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2$. ☐

V Factorisation d'un polynôme

Nous admettons le théorème suivant, qui exprime qu'un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ peut toujours s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème - Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire

$$P(x) = \lambda(x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_p)^{m_p} R_1(x) \dots R_r(x)$$

où
- ⋆ λ est un réel,
- ⋆ $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$,
- ⋆ $R_1, \dots, R_r$ sont des polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Exemple. Factoriser les polynômes suivants :

$$P(x) = (x^2 + 2)(x^3 - 1), \quad Q(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad R(x) = x^7 - 1.$$