Chapitre 14

Introduction aux espaces vectoriels réels

Le but de ce chapitre est de généraliser des raisonnements et opérations habituels dans le plan ou dans l'espace à d'autres ensembles sur lesquels on peut faire des opérations analogues, comme l'ensemble des polynômes, l'ensemble des fonctions réelles, ou l'ensemble des matrices d'une taille donnée.

Rappel – *Écriture d'un ensemble.* Nous avons vu trois manières de décrire un ensemble.

- Description en extension : écriture explicite de tous les éléments de l'ensemble.

  Exemple. $\{1, 2, 7, 8\}$
- Description par paramétrisation : on donne la forme des éléments de l'ensemble en fonction d'un ou plusieurs paramètres.

  Exemples. $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, $E_2 = \{2p,\ p \in \mathbb{N}\}$ ensemble des entiers naturels pairs.
- Description en compréhension : on décrit les éléments de l'ensemble comme éléments d'un autre ensemble (plus grand) et vérifiant une certaine propriété (en général une équation).

  Exemples. $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ \ {}^tM = M\}$, $E_2 = \{n \in \mathbb{N},\ n \text{ est pair}\} = \{n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$

I Structure d'espace vectoriel

1. Lois de composition

Nous allons nous intéresser à une catégorie d'ensembles pour lesquels il est possible d'additionner les éléments et les multiplier par un réel, comme c'est le cas de l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, avec les mêmes propriétés. Nous dirons alors que, muni de ces opérations, un tel ensemble est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ces opérations sont appelées *lois de composition* et sont décrites dans la définition suivante.

Définition - Loi de composition

Soit E un ensemble.

- ⋆ On appelle loi de composition interne sur E une application de $E \times E$ dans E. On note généralement cette application $(u, v) \mapsto u + v$.
- ⋆ On appelle loi de composition externe sur E une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E. On note généralement cette application $(\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$. On notera souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

2. Espace vectoriel

Définition - Espace vectoriel réel

Un *espace vectoriel réel* (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un ensemble E muni :

- ⋆ d'une loi de composition interne, notée $+$, vérifiant les propriétés suivantes :
  - *i.* $+$ est commutative : pour tous $u, v \in E$, $u + v = v + u$.
  - *ii.* $+$ est associative : pour tous $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
  - *iii.* $+$ admet un *élément neutre*, noté 0_E et appelé *vecteur nul* : pour tout $u \in E$, $u + 0_E = 0_E + u = u$.
  - *iv.* tout élément admet un *opposé* : pour tout $u \in E$, il existe $v \in E$ tel que $u + v = v + u = 0_E$. Dans ce cas, le vecteur v est noté $-u$.
- ⋆ d'une loi de composition externe, notée $\cdot$, vérifiant les propriétés suivantes :

v. l'existence d'une *unité* : pour tout $u \in E$, $1 \cdot u = u$.

vi. la compatibilité avec la multiplication : pour tous $u \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u = \mu \cdot (\lambda \cdot u)$.

vii. la distributivité de la loi $\cdot$ par rapport à la loi $+$: pour tous $u, v \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \quad \text{et} \quad (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

Remarques.

- Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés *scalaires* et les éléments de E sont appelés *vecteurs*. On ne note pas les vecteurs avec une flèche $\vec{u}$, sauf lorsqu'on fait de la géométrie dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- Il arrive parfois qu'on note 0 au lieu de 0_E pour désigner l'élément neutre de E. Attention toutefois à ne pas confondre 0_E et $0 \in \mathbb{R}$, qui sont des objets mathématiques différents.
- Dans la pratique, on ne passe généralement pas par la définition ci-dessus pour montrer qu'un ensemble muni de ses lois est un espace vectoriel. Nous allons voir qu'on peut se ramener à des exemples de référence pour aller beaucoup plus vite.

3. Exemples de références

Les exemples qui suivent sont fondamentaux. Pour chacun d'entre eux, nous allons détailler l'addition, le produit externe et donner l'élément nul. Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul.

a. L'ensemble $\mathbb{R}^n$

Un vecteur u de $\mathbb{R}^n$ s'écrit : $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. On munit $\mathbb{R}^n$ de :

- la loi interne $+$ donnée par $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \ = \ (x_1, +y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,
- la loi externe $\cdot$ donnée par $\lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$.

b. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des opérations déjà rencontrées précédemment :

- la loi interne donnée par $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \ldots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \ldots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$,
- la loi externe donnée par $\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \ldots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \ldots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$,

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'élément nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle : $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

c. L'ensemble $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$

Si A est un ensemble, on rappelle que $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ des opérations déjà rencontrées :

- la loi interne donnée par $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$,
- la loi externe donnée par $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$,

où $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'élément nul de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est la fonction constante nulle : $0_{\mathcal{F}(A,\mathbb{R})} : x \mapsto 0$.

d. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles

Comme les suites réelles sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, les lois sont celles de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ dans ce cas particulier. On munit ainsi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de :

- la loi interne donnée par $(u+v)_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- la loi externe donnée par $(\lambda \cdot u)_n = \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

où $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'élément nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0.

e. L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels

On rappelle qu'on ne distingue pas les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de leur fonction polynomiale associée. On munit donc $\mathbb{R}[x]$ des mêmes lois que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

- la loi interne donnée par $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$,
- la loi externe donnée par $\lambda \cdot P(x) = \lambda P(x)$,

où $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'élément nul de $\mathbb{R}[x]$ est le polynôme nul $0_{\mathbb{R}[x]}$.

Proposition - Espaces vectoriels de référence

Les ensembles suivants munis des lois décrites ci-dessus sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

i. $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

ii. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, avec $n, p \in \mathbb{N}^\star$.

iii. $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, où A est un ensemble quelconque.

iv. $\mathbb{R}[x]$.

v. $\mathbb{R}_n[x]$, avec $n \in \mathbb{N}$.

vi. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Règles de calcul

Les règles de calcul décrites ci-dessous sont les mêmes que celles vérifiées par les vecteurs du plan ou de l'espace. Il sera très utile par la suite de se faire une représentation des espaces vectoriels que nous considèrerons analogue à celles du plan ou de l'espace.

Proposition - Règles de calcul dans un espace vectoriel

Si E est un espace vectoriel réel, alors les règles de calcul suivantes s'appliquent.

i. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, alors $\lambda \cdot u = 0_E$ ssi $\big(\lambda = 0$ ou $u = 0_E\big)$.

ii. Si $u \in E$, alors $-u = (-1) \cdot u$.

Par conséquent, pour tous $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- si $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \ \Rightarrow\ u = v$,
- si $u \neq 0_E$, $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \ \Rightarrow\ \lambda = \mu$.

5. Combinaisons linéaires

Définition - Combinaison linéaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ tout vecteur u de E de la forme

$$u \ = \ \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels. Les réels λ_i sont appelés *coefficients* de la combinaison linéaire.

Remarque. D'après les propriétés des lois de composition $+$ et $\cdot$ de E, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $u_1, \ldots, u_n \in E$, alors le vecteur $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ est bien un vecteur de E. On dit que E est stable par combinaison linéaire.

Méthode - Montrer qu'un vecteur u est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$

Il s'agit de trouver des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$:

- on peut parfois les deviner,
- il faut sinon résoudre l'équation $u = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$, d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Par identification sur les coefficients (du vecteur, de la matrice, du polynôme, etc.), on se ramène à un système linéaire.

Exemples.

1. Soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. Tout vecteur $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de e_1 et e_2. En effet, $u = xe_1 + ye_2$.
2. Le vecteur nul 0_E est combinaison linéaire de toute famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E : si u est un vecteur de la famille, alors $0_E = u - u$.
3. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de A et B.

   On peut trouver ceci en résolvant l'équation $\lambda A + \mu B = M$, qui équivaut au système

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda - \mu & = & 3 \\ 3\lambda + 2\mu & = & 4 \\ -\lambda & = & -2 \\ 2\lambda + \mu & = & 1 \end{array}\right.$$
   dont les solutions sont $\lambda = 2$ et $\mu = -1$, ce qui donne $M = 2A - B$.
4. Montrer que $g : x \mapsto \cos(x - 1)$ est combinaison linéaire des fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$.
5. Le vecteur $(1, 1, 1)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$.

   En effet, toute combinaison linéaire de ces vecteurs s'écrit $\lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 0) = (\lambda + \mu, \mu, 0)$. Quels que soient les réels λ, μ, on a $(\lambda + \mu, \mu, 0) \neq (1, 1, 1)$.
6. Le vecteur $(3, -1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, -1)$, $(5, -3)$ et $(-2, 2)$:

   $$(3, -1) = 0\,(1, -1) + 1\,(5, -3) + 1\,(-2, 2) = -2\,(1, -1) + 1\,(5, -3) + 0\,(-2, 2).$$

Remarque. Il n'y a pas toujours unicité des coefficients dans une combinaison linéaire (voir Exemple 6 ci-dessus), ce qui veut dire qu'on ne pourra pas toujours procéder par identification.

II Sous-espace vectoriel

1. Définition

Définition - Sous-espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel réel et $F \subset E$ (souvent noté sev). On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E lorsque

- ⋆ F est non vide,
- ⋆ F est stable par $+$: pour tous $u, v \in F$, $u + v \in F$.
- ⋆ F est stable par $\cdot$: pour tous $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u \in F$.

Remarques.

- Les sous-espaces vectoriels de E sont les parties non vides de E stables par combinaison linéaire.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$: comme F est non vide, il existe $u \in F$, ce qui entraîne que $0_E = u - u \in F$.

Exemple. E et $\{0_E\}$ sont tous deux sous-espaces vectoriels de E, ils sont dits *triviaux*.

Méthode - Montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie les propriétés suivantes.

i. $F \subset E$, où E un espace vectoriel réel qu'il faut préciser.

ii. $0_E \in F$ (ainsi F est non vide).

iii. Pour montrer que F est stable par $+$ et par $\cdot$, il suffit de montrer que :

$$\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u + v \in F.$$

Exemple. Montrons que $F = \{(x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- On a $F \subset \mathbb{R}^2$.
- En prenant $x = 0$, on voit que $(0,0) \in F$.
- Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (x, 2x)$ et $v = (y, 2y)$, par conséquent

$$\lambda u + v \ = \ \lambda(x, 2x) + (y, 2y) \ = \ (\lambda x + y,\, 2\,(\lambda x + y)) \ \in \ F.$$

Plus généralement, si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $F = \{(ax, bx),\ x \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel réel E, alors F, muni des mêmes lois que E, est un espace vectoriel réel.

Exemples.

- On retrouve le fait que $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel : il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$:
  - ◇ on a bien $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$,
  - ◇ le polynôme nul appartient bien à $\mathbb{R}_n[x]$.
  - ◇ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, alors comme $\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg Q) \leqslant n$, on a $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[x]$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire linéaire à p inconnues est un sev de $\mathbb{R}^p$.

Méthode - Montrer qu'un ensemble F définit un espace vectoriel

Pour montrer que F définit un espace vectoriel, on ne revient en général pas à la définition ! On essaie de trouver un espace vectoriel de référence E tel que $F \subset E$ qui le contient, et on cherche à prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. Les lois $+$ et $\cdot$ seront alors implicites : il s'agira des lois de E.

Exercice 1. Pour chacun des exemples ci-dessous, dire lesquels sont des espaces vectoriels.

1. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 3X\}$, où A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3x + y = 0\}$ et $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 3x + y = 4\}$.
3. L'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble des fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble E_a des polynômes qui s'annulent en a, où a est un réel fixé.
6. L'ensemble $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\}$.
7. L'ensemble des matrices diagonales de taille n.

Proposition - Intersection de sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On a bien sûr $F \cap G \subset E$. Par ailleurs,

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$.
- Si $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors come F et G sont des sev, on a $\lambda x + y \in F$ et $\lambda x + y \in G$. Finalement, $\lambda x + y \in F \cap G$. □

Remarque. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Par exemple, d'après ce qui précède $F = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais $F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$: les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans $F \cup G$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

2. Sous-espace vectoriel engendré

Définition - Sous-espace vectoriel engendré

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie non vide de E. L'*espace vectoriel engendré par* A, noté $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ v_1, \ldots, v_n \in A \right\}$$

Remarque. Pour alléger les notations, on écrit $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ au lieu de $\mathrm{Vect}(\{v_1, \ldots, v_n\})$.

Proposition

Si E est un espace vectoriel et A est une partie non vide de E, alors $\mathrm{Vect}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel de E. Le sev $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sev de E contenant A : si F est un sev de E, alors

$$A \subset F \ \Rightarrow\ \mathrm{Vect}(A) \subset F.$$

En effet, il est clair que $\mathrm{Vect}(A) \subset E$ est non vide et stable par combinaison linéaire. Le deuxième point est clair également : si F est un sev de E et contient A, alors il contient toutes ses combinaisons linéaires.

Remarque. En particulier, $\mathrm{Vect}(A)$ est un espace vectoriel.

Exemples.

- Pour $u \in E$, $\mathrm{Vect}\,(u) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Si $u \neq 0_E$, on dit que $\mathrm{Vect}(u)$ est la *droite vectorielle* engendrée par u, on la note $\mathbb{R}u$.
- Pour $u, v \in E$, $\mathrm{Vect}\,(u, v) = \{\lambda u + \mu v,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, on dit que $\mathrm{Vect}\,(u, v)$ est le *plan vectoriel* engendré par u et v.

Méthode - Montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E

Pour montrer que F est un sev de E, on peut aussi chercher une partie A de E telle que $F = \mathrm{Vect}\,(A)$. Cette méthode a l'avantage de fournir une famille de vecteurs qui engendrent F. Nous verrons qu'une telle information est très utile.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. On a

$$\mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) = \{x\,(1, 0, 0, 0) + y\,(0, 1, 0, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, 0, 0),\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2. L'ensemble $E = \{(x, y, -2x + y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel.

   En effet, on peut écrire $E = \{x\,(1, 0, -2) + y\,(0, 1, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,((1, 0, -2), (0, 1, 1))$, ce qui implique que E est un sev de $\mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel.

3. Dans $\mathbb{R}[x]$, on pose $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ et $P_2(x)=x^2$. On a
$$\mathrm{Vect}\,(P_0,P_1,P_2) \;=\; \{a_0P_0+a_1P_1+a_2P_2,\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\} \;=\; \{a_0+a_1x+a_2x^2,\ a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\} \;=\; \mathbb{R}_2[x].$$

4. Si $n,p\in\mathbb{N}^\star$, on a $\mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right)=\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, où les matrices $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires.

Proposition

Soient E un espace vectoriel et $v_1,\dots,v_n\in E$.

i. Retirer un vecteur. Si v_n est combinaison linéaire des vecteurs $v_1,\dots,v_{n-1}$ alors
$$\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n) \;=\; \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_{n-1})\,.$$

ii. Remplacer un vecteur. On peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres, ou multiplier un vecteur par un scalaire non nul sans changer le sev engendré :

– si $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$, alors $\mathrm{Vect}\left(v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_iv_i\right) \;=\; \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)\,.$

– si $\alpha\in\mathbb{R}^\star$, alors $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,\alpha v_n) \;=\; \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)\,.$

Démonstration. *i.* - On a bien sûr par définition $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_{n-1})\subset\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$. Montrons la deuxième inclusion. Comme v_n est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1,\dots,v_{n-1}$, on a $v_n\in\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_{n-1})$. Finalement, $\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_{n-1})$, donc $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)\subset\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_{n-1})$ (on sait que $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$ est le plus petit sev de E contenant $v_1,\dots,v_n$).

- Comme $v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_iv_i\in\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$, on a $\mathrm{Vect}\left(v_1,\dots,v_n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_iv_i\right)\subset\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$.

D'autre part, si $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n\in\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$, alors
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i \;=\; \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n\lambda_i)v_i+\alpha_n\left(v_n+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iv_i\right) \;\in\; \mathrm{Vect}\left(v_1,\dots,v_{n-1},v_n+\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iv_i\right),$$
d'où l'autre inclusion.

ii. On voit le deuxième point en remarquant qu'on peut passer d'une combinaison linéaire de $(v_1,\dots,\alpha v_n)$ à une combinaison linéaire de $(v_1,\dots,v_n)$ en écrivant $\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_nv_n \;=\; \lambda_1v_1+\ldots+\frac{\lambda_n}{\alpha}(\alpha v_n)$. □

Remarque. En particulier, $\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n,0_E)=\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)$.

III Familles génératrices, familles libres

1. Familles génératrices

Définition - Famille génératrice

On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_n)$ de vecteurs de E est *génératrice* de E, ou encore que la famille $(v_1,\dots,v_n)$ *engendre* E si
$$\mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,v_n)=E.$$
Cela revient à dire que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de la famille $(v_1,\dots,v_n)$:
$$\forall u\in E,\ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R},\quad u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iv_i.$$

Exemples.

1. $\big((1,0),(0,1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, les n vecteurs
$$e_1=(1,0,\dots,0),\ e_2=(0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ e_n=(0,\dots,0,1)$$
forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

3. La famille de polynômes $(1, x, x^2, x^3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$.
4. La famille $\big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ génératrice de $\mathbb{R}^3$.
5. La famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ engendre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: on a vu que $\mathrm{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\right) = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Méthode - Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel

Pour déterminer une famille génératrice d'un espace E, on cherche à écrire E vous la forme $E = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E. La famille $\mathcal{F}$ est alors génératrice de E.

Exemple. Recherche d'une famille génératrice de $E = \{(x, y, -2x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$:

On a $E = \{x\,(1,0,-2) + y\,(0,1,1),\ x, y \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, E est *l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $v_1 = (1,0,2)$ *et* $v_2 = (0,1,1)$. Autrement dit, $E = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$. On en déduit que la famille (v_1, v_2) est génératrice de E.

Exercice 2.

1. Déterminer une famille génératrice de $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ 3x - y + 4z = 0\right\}$.
2. Déterminer une famille génératrice de $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(1) = 0\}$.

Remarque. La proposition de la page 7 permet de déduire d'une famille génératrice une famille génératrice plus simple : en ôtant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille ou en multipliant un vecteur par un scalaire non nul, on obtient une autre famille génératrice de E.

Exemples.

1. Dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donner des familles génératrices plus simples de :

   a. $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

   b. $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$.

2. Montrer que la famille $(1,\ x+1,\ x+2,\ x^2+1,\ x^3)$ engendre $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Familles libres, familles liées

Définition - Familles libres et liées

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que $(v_1, \dots, v_n)$ est une *famille libre de E* si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire triviale, dont tous les coefficients sont nuls. Cela s'écrit : pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont *linéairement indépendants.*

Dans le cas où la famille n'est pas libre, c'est-à-dire dans le cas où il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *non tous nuls* tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E, \qquad (L)$$

on dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est *liée.* On appelle alors (L) une *relation de liaison* de la famille.

Le caractère libre d'une famille de vecteur traduit l'unicité des coefficients dans une combinaison linéaire de ces vecteurs. En d'autres termes, on peut procéder par identification dans la manipulation de ces combinaisons linéaires, comme l'exprime le résultat suivant.

Proposition - Principe d'identification

Une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i, \quad \Rightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i. \tag{1}$$

Démonstration.

- Supposons que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ sont des réels tels qu'on a la relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$, ce qui implique que $\lambda_i - \mu_i = 0$ pour tout i, soit $\lambda_i = \mu_i$.
- Réciproquement, supposons que (1) est vérifiée. Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, alors on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} 0\, v_i$, donc (1) entraîne donc que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La famille $(v_1, \dots, v_n$e st donc libre. □

Remarques.

- D'après la définition, une famille est libre si et seulement si *aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.*

  Ceci se récrit : une famille est liée si et seulement si *l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*
- *Cas d'un seul vecteur.* Une famille d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas le vecteur nul.
- Si une famille est libre, alors toute sous-famille de cette famille est libre.

Exemples. Les familles $\big((0,1),(1,1),(1,1)\big)$ et $\big(0,-1,3),(2,1,-1),(2,0,2)\big)$ sont liées.

Définition - Vecteurs colinéaires

Si E un espace vectoriel, on dit que deux vecteurs u et v de E sont *colinéaires* si la famille (u, v) est liée, c'est-à-dire s'il existe λ, μ non tous deux nuls tels que $\lambda u + \mu v = 0_E$. Ceci équivaut à l'existence d'un réel λ tel que

$$u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u.$$

Remarque. *Cas de deux vecteurs.* Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire qu'aucun des deux vecteurs n'est multiple de l'autre.

⚠ Le résultat ci-dessus ne s'applique que dans le cas d'une famille de deux vecteurs : on ne parle de colinéarité que pour *deux vecteurs.*

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille (e_1, e_2), où $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ est une famille libre, car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $u = (-1,0,2)$, $v = (2,0,-4)$ et $w = (1,-1,3)$. Alors (u, v, w) n'est pas libre, car $v = -2u$.

Méthode - Cas d'une famille de trois vecteurs ou plus

Pour prouver qu'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de plus de trois vecteurs est libre, on est amené à résoudre l'équation $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$, d'inconnues réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En identifiant, on obtient un système linéaire. Il y a alors deux issues possibles :

- le système a une seule solution $(0, \dots, 0)$: la famille est libre.
- le système a une infinité de solutions : la famille est liée. N'importe laquelle des solutions non nulles fournit une relation de liaison.

Exemples.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

   En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vérifient $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = (0, \ldots, 0)$, alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$, donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2. La famille de polynômes $(1, x, x^2)$ est libre.

   En effet, si on suppose que $ax^2 + bx + c = 0$, c'est-à-dire que $ax^2 + bx + c$ est le polynôme nul, alors ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire que $a = b = c = 0$. Ainsi, la famille est libre.

3. Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est libre.

4. Les fonctions $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \sin x$ forment une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   En effet, supposons que $\lambda f + \mu g = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$.
   En choisissant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient alors $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right.$, et la famille est libre.

L'exemple 2 ci-dessus se généralise aisément à une famille de polynôme de la manière suivante.

Proposition

Si $P_1, \ldots, P_n$ sont des polynômes non nuls tels que $\deg P_1 < \deg P_2 < \ldots < \deg P_n$, alors la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre. On dit alors que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est échelonnée en degré.
Plus généralement, toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Exercice 3.

1. Montrer que la famille $\big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $g : x \mapsto \cos(x-1)$, $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(x)$. La famille (g, f_1, f_2) est-elle libre ou liée ?
3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre ou liée ?

Le résultat suivant permet de reconnaître aisément le caractère libre de certaines familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque vecteur de $\mathscr{F}$ commence par strictement plus de 0 que le précédent est libre.
On dit d'une telle famille qu'elle est échelonnée.

Exemple. La famille $\big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\big)$ de l'exercice précédent est une famille échelonnée de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, elle est donc libre.

Proposition

Soient E un espace vectoriel et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de E.

i. *Ajouter un vecteur.* Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre et si v_{n+1} n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, alors $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ est une famille libre.

ii. *Remplacer un vecteur.* On peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres, ou multiplier un vecteur par un scalaire non nul sans changer le caractère libre de la famille :

- si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$, alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre ssi $\left(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i\right)$ est libre,
- si $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre ssi $(v_1, \ldots, v_{n-1}, \alpha v_n)$ est libre.

D'après la proposition précédente, les opérations du pivot de Gauss sur les vecteurs d'une famille de $\mathbb{R}^n$ ne changent pas le caractère libre de la famille étudiée. On peut donc avoir recours à ces opérations pour se ramener à une famille échelonnée.

Méthode - Étudier le caractère libre d'une famille de $\mathbb{R}^n$

Pour déterminer si une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est libre, on peut :

- effectuer les opérations du pivot de Gauss pour se ramener à une famille échelonnée,
- conclure : si la famille échelonnée obtenue ne contient que des vecteurs non nuls, alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, sinon elle est liée.

Exemple. Montrons que la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3)$, où $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ est famille libre de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ est libre} \quad &\Leftrightarrow \quad \big((1,0,2),(0,1,-3),(0,1,-1)\big) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \quad \big((1,0,2),(0,1,-3),(0,1,-1)\big) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \quad \big((1,0,2),(0,1,-3),(0,0,2)\big) \text{ est libre.} \end{aligned}$$

Comme cette dernière famille est une famille échelonnée de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathscr{F}$ est libre.

3. Bases

Définition - Base

On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'un espace vectoriel E est une *base* de E si elle est libre et génératrice de E.

Exemples.

1. La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$: nous avons vu qu'elle était libre et génératrice.
2. La famille $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}^2[x]$, puisqu'elle est libre et génératrice.

Les deux bases de l'exemple précédent sont des bases "naturelles", respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^2[x]$, qu'on appelle *bases canoniques* sur ces espaces vectoriels. Nous allons généraliser ceci aux espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Bases canoniques.

- **Cas de $\mathbb{R}^n$** $(n \in \mathbb{N}^\star)$. La famille

$$\big((1, 0, \dots, 0),\ (0, 1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ (0, \dots, 0, 1)\big)$$

  est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée *base canonique*.
- **Cas de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$** $(n, p \in \mathbb{N}^\star)$. La famille $\big(E_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée *base canonique* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. À titre d'exemple :
  - ◇ la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
  - ◇ la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- **Cas de $\mathbb{R}^n[x]$** $(n \in \mathbb{N})$. La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}^n[x]$, appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^n[x]$.

De la définition de base découle directement la proposition suivante, qui fournit une manière de montrer directement qu'une famille est une base.

Proposition

Soit E un espace vectoriel. Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base si et seulement si pour tout vecteur u de E, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u \;=\; \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les *coordonnées* de u dans la base $\mathscr{B}$. On les note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ou encore $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Remarque.
- L'existence de la combinaison linéaire dans la proposition correspond au caractère générateur de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, et l'unicité au caractère libre de $(e_1, \dots, e_n)$.
- Attention, si on change l'ordre des vecteurs d'une base, on obtient une base différente de la base de départ, et on change donc les coordonnées. Par exemple, si $P(x) = 5x^3 + x + 3$, alors P a pour coordonnées $(5, 0, 1, 3)$ dans la base $(x^3, x^2, x, 1)$, et $(3, 5, 1, 0)$ dans la base $(1, x^3, x, x^2)$.

Méthode - Montrer qu'une famille de vecteurs est une base

1. Pour montrer qu'une famille $\mathscr{B}$ donnée est une base d'un espace vectoriel E, on pourra :
   - soit montrer que tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.
   - soit montrer que $\mathscr{B}$ est libre d'une part, génératrice d'autre part.
2. Pour obtenir une base d'un espace vectoriel E, on commencera par chercher une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de E, de sorte que $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$.

   Si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, c'est gagné. Sinon, on essaiera de retirer suffisamment de vecteurs pour obtenir une famille qui est toujours génératrice, et libre.

Exemples.

1. La famille $\big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\big)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

1. Déterminer une base de $E = \{(x, y, -2x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.