Chapitre 15

Intégration sur un segment

Dans de nombreuses applications, on souhaite trouver une fonction qui a pour dérivée une fonction donnée. On cherche donc à faire l'opération inverse de la dérivée.

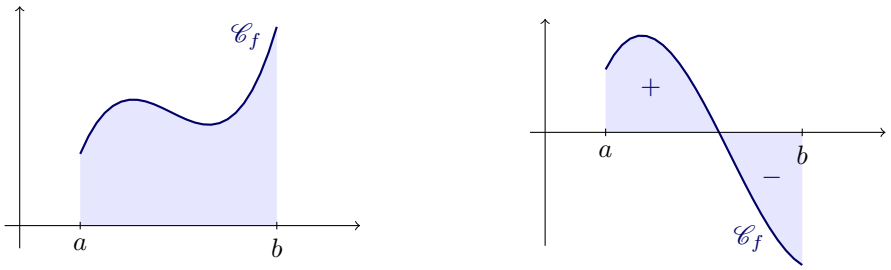
C'est le cas par exemple si on connaît la vitesse instantanée $v(t)$ d'un objet en mouvement en tout temps t, et qu'on souhaite retrouver sa position $f(t)$ à un temps t donné. Comme on sait que la vitesse v est la dérivée de la position f, il s'agit de trouver une fonction qui a v pour dérivée.

Nous allons voir que la fonction F telle que $F(x)$ donne l'aire sous la courbe de f entre les abscisses a et x est une solution de ce problème, si a est un réel donné.

I Intégrale d'une fonction sur un segment

1. Intégrale et sommes de Riemann

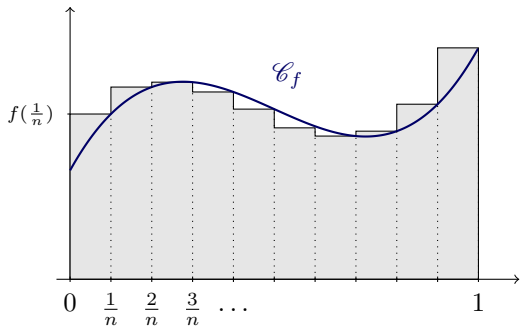
On souhaite définir la notion d'intégrale d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, comme l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. L'aire est comptée de manière algébrique, c'est-à-dire que les parties au-dessus de l'axe des abscisses comptent positivement, et les autres négativement.



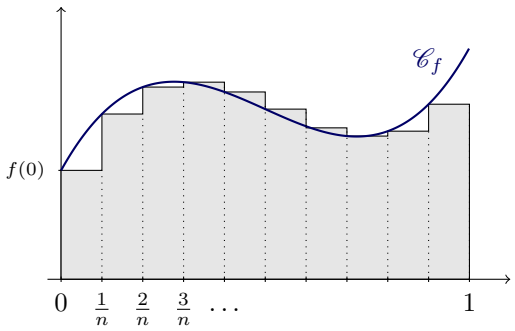
Nous allons voir plus bas qu'alors la fonction F définie par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable, et vérifie $F' = f$ sur $[a,b]$.

Remarquons toutefois que l'aire sous une courbe n'est pas calculable facilement, et n'a même pas de définition simple. Pour contourner ce problème, on va se ramener à un calcul d'aire bien connu : l'aire de rectangles.

Pour commencer, examinons la situation suivante, où nous approchons l'aire sous la courbe de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la manière suivante. On commence par découper l'intervalle $[0,1]$ en n sous-intervalles, tous de taille $\frac{1}{n}$. On remplace ensuite f sur chaque intervalle $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$ par sa valeur $f\left(\frac{k}{n}\right)$ en $\frac{k}{n}$. L'aire à calculer devient l'aire d'une union de rectangles.



Approximation par des rectangles "à droite"



Approximation par des rectangles "à gauche"

Pour l'approximation par des rectangles "à droite", l'aire du $k^{\text{ème}}$ rectangle gris est donnée par $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$, de sorte que l'aire totale de la surface grise est donnée par

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour l'approximation par des rectangles "à gauche", l'aire de la surface grise est donnée par $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Plus généralement, on peut faire ces approximations pour une fonction f définie sur un segment $[a,b]$, que l'on découpe de la même manière en n intervalles de taille $\frac{b-a}{n}$. Les extrémités de ces intervalles ont pour abscisse $a+k\frac{b-a}{n}$. On obtient donc les deux sommes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (\textit{rectangles “à droite”}), \qquad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (\textit{rectangles “à gauche”}).$$

Ces sommes sont appelées *sommes de Riemann* de f. Le résultat ci-dessous (admis) affirme que ces suites convergent vers une même valeur, que nous appellerons intégrale de f sur $[a,b]$.

Théorème et définition - Intégrales et sommes de Riemann

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue, alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right), \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right),$$

convergent vers une valeur commune, appelée intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par ailleurs, on convient de noter $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Intégration des constantes. Si f est la fonction constante égale à $\alpha\in\mathbb{R}$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,\alpha.$$

En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a $S_n = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha = \frac{1}{n}\times n\alpha = \alpha$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Utilisation des sommes de Riemann pour calculer des limites. Si f est continue sur $[0,1]$, alors par le théorème ci-dessus avec $a=0$ et $b=1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ converge vers $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{où} \quad f: t\mapsto\frac{1}{1+t}.$$

2. Propriétés de l'intégrale

Les deux propriétés suivantes de l'intégrale : linéarité et relation de Chasles, sont admises.

Proposition - Linéarité de l'intégrale

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I et soient $a,b\in I$. Pour tous réels λ et μ, on a

$$\int_a^b\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition - Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois éléments de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Cette relation reste valable même si $c \notin [a, b]$.

La propriété suivante repose directement sur la positivité de la limite d'une suite positive.

Proposition - Positivité de l'intégrale

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Proposition - Croissance de l'intégrale

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On considère la fonction $h : t \mapsto g(t) - f(t)$. La fonction h ainsi définie est continue et positive sur $[a, b]$, donc d'après la positivité de l'intégrale, on a $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par linéarité, on a

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0. \quad \square$$

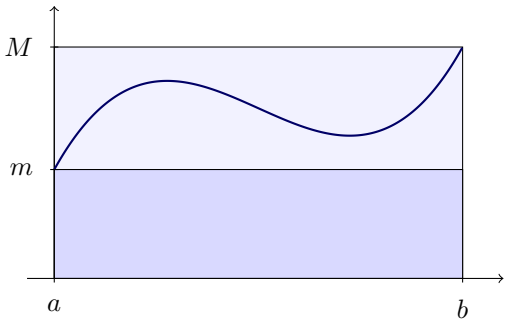
Conséquence. Si f est une fonction continue telle que pour tout $t \in [a, b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$, alors

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\,(b-a).$$

On a donc

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé *valeur moyenne de f sur $[a, b]$*.



Exemple. Comme on sait que $1 \leqslant 1 + \cos^2 t \leqslant 2$ pour tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$\pi \leqslant \int_0^\pi (1 + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi.$$

Proposition - Inégalité triangulaire

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour tout $t \in [a,b]$, on a $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne alors bien que $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$. □

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a,b \in I$ avec $a \leqslant b$. Si pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leqslant M$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leqslant\; M\,(b-a).$$

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 \big(\ln t\big)^n \cos t\,\mathrm{d}t$. Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \in [1,2]$, $\ln(t) \geqslant 0$ donc

$$|(\ln t)^n \cos t| \;=\; (\ln t)^n\,|\cos t| \;\leqslant\; (\ln t)^n \;\leqslant\; (\ln 2)^n,$$

du fait que la fonction $t \mapsto (\ln t)^n$ est croissante.
Par ailleurs, comme $\ln 2 \in]-1,1[$, on a $(\ln 2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit donc que $|I_n| \leqslant (\ln 2)^n$, ce qui entraîne par encadrement que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition - Positivité stricte

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, avec $a < b$.

$$\text{Si } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ alors } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

Autrement dit, si f n'est pas la fonction nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Remarque. La réciproque est bien sûre vraie : on sait que si f est la fonction nulle, son intégrale est nulle.

Démonstration. Nous allons montrer que si f n'est pas la fonction nulle, alors son intégrale n'est pas nulle. Si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$.
Par continuité, il existe un intervalle $I = [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ avec $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $f(t) > \frac{f(x_0)}{2}$.
Comme f est positive, on a $\int_a^{x_0-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\alpha}^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, donc par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;\geqslant\; \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t \;\geqslant\; \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \frac{f(x_0)}{2}\,\mathrm{d}t \;=\; \alpha\,f(x_0) \;>\; 0.$$

Par contraposée, ceci donne que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle. □

Conséquence. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a < b$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$,

$$\text{si } \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{alors } \; f = g \text{ sur } [a,b].$$

Démonstration. La fonction $g-f$ est positive, et $\int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t = 0$, donc on a $g-f=0$, *i.e.* $f=g$. □

3. Primitives d'une fonction

Définition - Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive de f sur I* toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemples.

1. Si $f : x \mapsto x^2 + 2$, alors les fonctions $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x$ et $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x + 1$ sont des primitives de f.
2. Si $g : x \mapsto \ln x$, alors $G : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. Si $h : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors la fonction $H : x \mapsto \begin{cases} \ln x + 2 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}^\star$.

Théorème - Primitive d'une fonction continue

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$. La fonction F définie par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur l'intervalle I.

En particulier, une fonction continue sur un intervalle I admet toujours une primitive sur I.

Démonstration. Nous allons montrer le résultat dans le cas particulier où f est croissante, le résultat général est admis. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in I$, F est dérivable en x, et $F'(x) = f(x)$. Si $h \geqslant 0$, on obtient grâce à la relation de Chasles :

$$F(x+h) - F(x) \;=\; \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est croissante, on a pour tout $t \in [x, x+h]$, $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$. On en déduit donc que

$$f(x)\,(\underbrace{x+h-x}_{=h}) \;\leqslant\; \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; f(x+h)\,(\underbrace{x+h-x}_{=h}).$$

Par conséquent, on a $f(x) \;\leqslant\; \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) \;\leqslant\; f(x+h)$. Or $f(x+h) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$ par continuité de f.

Ainsi, en passant à la limite quand $h \to 0^+$, on obtient alors par encadrement que F est dérivable à droite, et que $F'_d(x) = f(x)$. On peut procéder de même pour montrer que F est dérivable à gauche en x, et $F'_g(x) = f(x)$. Finalement, F est donc dérivable en x, et $F'(x) = f(x)$. □

Proposition - Ensemble des primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

i. Si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

ii. Si $a \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(a) = y_0$, qui est donnée par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + y_0.$$

Démonstration.

i. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $F' = G' = f$ sur I. Par conséquent, $(G - F)' = G' - F' = 0$ sur I, ce qui entraîne que $G - F$ est constante. On a donc bien l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$.

ii. On sait par le théorème qui précède que la fonction F de l'énoncé convient. Si G est une autre primitive qui convient, alors $G = F + k$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$. Comme en particulier $G(a) = y_0 = F(a)$, on en déduit que $k = 0$, ce qui donne que $F = G$. On a donc bien montré l'unicité. □

Proposition - Intégrale et primitive

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Pour tous $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(b) - F(a).$$

Démonstration. On considère par exemple la primitive de f sur I qui s'annule en a, c'est-à-dire $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors

$$F(b) - F(a) \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - 0 \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si maintenant G est une primitive quelconque de f, alors on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$. Ainsi, on a $G(b) - G(a) \;=\; (F(b) + k) - (F(a) + k) \;=\; F(b) - F(a) \;=\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. □

Autre formulation. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous $a, b \in I$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

- Dans les calculs, on utilise généralement la notation $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- On a $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- La variable dans l'intégrale est *muette* : on peut écrire indifféremment $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, …

Exemple. Calcul de $\int_{-1}^2 (t^2 + 2)\,\mathrm{d}t$.

On remarque que $F : t \mapsto \frac{t^3}{3} + 2\,t$ est une primitive de la fonction $f : t \mapsto t^2 + 2$, donc

$$\int_{-1}^2 f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{t^3}{3} + 2\,t\right]_{-1}^2 \;=\; \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{-1}{3} - 2\right) \;=\; 9.$$

Primitives usuelles.

Il est primordial, pour trouver facilement des primitives de fonctions données, de bien connaître les primitives usuelles ci-dessous.

Fonction	*Primitive*	*Domaine de validité*
$t \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$t \mapsto at$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	– si $\alpha \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R}$, – si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^\star$: $\mathbb{R}^\star$, – sinon : $\mathbb{R}_+^\star$
$t \mapsto \dfrac{1}{t}$	$t \mapsto \ln\lvert t\rvert$	$\mathbb{R}^\star$
exp	exp	$\mathbb{R}$
cos	sin	$\mathbb{R}$
sin	$-\cos$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2} = \tan^2 + 1$	tan	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$	arctan	$\mathbb{R}$

Par ailleurs, il est souvent très utile de reconnaître les formes de dérivées usuelles pour déterminer une primitive d'une fonction dans certains cas. À ce titre, on rappelle les cas suivants, qu'il convient de bien connaître, où u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	*Primitive*	*Domaine de validité*
$u'u^n, \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$\{t,\ u(t) \neq 0\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\{t \in I,\ u(t) > 0\}$
$u'u^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\{t \in I,\ u(t) > 0\}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$\{t \in I,\ u(t) \neq 0\}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	I

On note que pour retrouver les 4 premiers cas ci-dessus, il suffit de retenir qu'une primitive d'une fonction de la forme $u'u^\alpha$, où $\alpha \neq -1$, est donnée par $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ sur le domaine où elle est bien définie.
Plus généralement, il est important de reconnaître lorsqu'une fonction est de la forme $f : t \mapsto u'(t)\varphi'(u(t))$, où φ est une fonction dérivable. Dans ce cas, la fonction $F : t \mapsto \varphi(u(t))$ est une primitive de f.

Exemples.

1. Les primitives de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont toutes les fonctions de la forme
$$F : t \mapsto -\frac{1}{t} + k, \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

2. La primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui s'annule en 1 est donnée par
$$F : t \mapsto 2\sqrt{t} - 2.$$

3. Déterminons une primitive de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{-\sin}{\cos}$, la fonction tan est de la forme $-\frac{u'}{u}$, où u désigne la fonction cos. Par conséquent, la fonction F suivante est une primitive de tan :
$$F : t \mapsto -\ln(|\cos t|).$$

4. Calcul de $\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la fonction $\cos\sin^2$ est de la forme $u'u^2$, où u désigne la fonction sin, on en déduit que $\frac{\sin^3}{3}$ est une primitive de $\cos\sin^2$. Ainsi,
$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{1}{3}.$$

5. Calcul de $\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$. On remarque que $\frac{1}{t\ln t} = \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, où u désigne la fonction ln. Ainsi,
$$\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \;=\; [\ln(|\ln t|)]_2^{\mathrm{e}} \;=\; \ln(\ln \mathrm{e}) - \ln(\ln 2) \;=\; -\ln(\ln 2).$$

II Autres techniques de calcul d'intégrales

Lorsqu'on ne parvient pas à calculer une intégrale en déterminant une primitive à l'aide des primitives usuelles, ou qu'on ne reconnaît pas de forme de dérivées usuelle dans l'intégrande, on peut avoir recours à l'une des deux techniques suivantes, qui sont très classiques, et qu'il convient de très bien maîtriser.

1. Intégration par parties

Théorème - Intégration par parties (IPP)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a, b \in I$. Alors,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [u(t)v(t)]_a^b \;-\; \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t..$$

Démonstration. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$. Comme toutes ces fonctions sont continues, les intégrales suivantes existent, et la linéarité permet d'écrire

$$\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b (u'v)(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b (uv')(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme on a $\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = (uv)(b) - (uv)(a) = [u(t)v(t)]_a^b$, on a bien la relation souhaitée. □

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

On choisit naturellement de dériver la fonction $t \mapsto t$, et d'intégrer la fonction $t \mapsto \cos t$. En d'autres termes, on pose $u : t \mapsto \sin t$, et $v : t \mapsto t$, qui sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$. La formule d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t \;=\; [t\cdot\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\sin t\,\mathrm{d}t \;&=\; \pi\sin\pi - 0\sin 0 - [-\cos t]_0^\pi \\ &=\; -(-\cos\pi - (-1)) \;=\; -2.\end{aligned}$$

Recherche de primitive par IPP.

On peut rechercher une primitive d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I en ayant recours à une intégration par parties : on sait que si $a \in I$, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I : il s'agit de la primitive de f qui s'annule en a. Comme f et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, une IPP nous permet d'écrire

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^x 1\times f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [t\,f(t)]_a^x - \int_a^x t\,f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si on connaît une primitive de $t \mapsto tf'(t)$, alors on obtient une primitive de f par cette méthode.

Exemple à retenir. Recherche d'une primitive de ln : on cherche la primitive qui s'annule en e, donnée par

$$F(x) \;=\; \int_\mathrm{e}^x \ln t\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\mathrm{e}^x 1\times\ln t\,\mathrm{d}t \;=\; [t\,\ln t]_\mathrm{e}^x - \int_\mathrm{e}^x t\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; x\ln x - \mathrm{e} - (x-\mathrm{e}) \;=\; x\ln x - x,$$

en utilisant la même IPP que ci-dessus.

Primitive de ln. On retiendra que la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 1. Déterminer une primitive de la fonction arctan.

2. Changement de variable

Principe. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $\varphi : [a,b] \to I$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors on a

$$\diamond \quad \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [F(\varphi(t)]_a^b \;=\; F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

$$\diamond \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \;=\; [F(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \;=\; F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

où F est une primitive de f sur I, car on reconnaît que $t \mapsto f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto F(\varphi(t))$. On a donc la relation

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Dans la pratique. On peut chercher à utiliser directement la formule ci-dessus, en écrivant si besoin l'intégrale sous la bonne forme. Ce n'est toutefois pas toujours possible. On a alors recours à un changement de variable.

On commence par écrire la variable u en fonction de la variable t :

$$u \;=\; \varphi(t).$$

Dans la pratique et dans le cadre du programme, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, elle définit donc une bijection d'un intervalle $I = [a,b]$ sur un intervalle J qui a pour extrémités $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. On procède alors de la manière suivante :

- on écrit les bornes pour la nouvelle variable : $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$,
- pour retrouver la formule, on écrit $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient alors :

$$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(t)}_{u})\,\underbrace{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}u} \;=\; \int_{\substack{\varphi(a)\\ t=a \;\Leftrightarrow\; u=\varphi(a)\\ t=b \;\Leftrightarrow\; u=\varphi(b)}}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

⚠ Il est très important de ne pas mélanger les variables ! Le changement de variable dans l'intégrale se fait d'une seule fois, en remplaçant toutes les apparitions de l'ancienne variable par une apparition de la nouvelle, et les anciennes bornes par les nouvelles.

Il arrive par ailleurs qu'on introduise des changements de variables du type $t = \psi(u)$, où on écrit l'ancienne variable en fonction de la nouvelle et non l'inverse. Voici un petit guide pour obtenir un passage d'une variable à l'autre dans l'intégrale et dans le bloc différentiel :

$u = \varphi(t)$	$t = \psi(u)$
$\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}t = \psi'(u)\,\mathrm{d}u$

où la fonction $\psi : J \to I$ est la bijection réciproque de φ. Ceci n'est possible bien sûr que si ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ elle aussi. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'écrire tout ceci à chaque changement de variable, on écrira seulement la partie qui sert.

Exemples.

1. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $u = \sin t$.

   La fonction $\varphi : t \mapsto \sin t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

   - *Bornes :* on a $\begin{cases} t = 0 \;\Leftrightarrow\; u = \sin 0 = 0, \\ t = \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; u = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \end{cases}$
   - *Bloc différentiel :* on a $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable, on a donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2u^2\,\mathrm{d}u = \left[2\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Notons qu'on a déjà calculé cette intégrale sans changement de variable, en remarquant que l'intégrande est de la forme $2u'u^2$.

2. Calcul de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$, avec le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ sur $[1,\mathrm{e}]$. Par ailleurs, sa bijection réciproque est ln, et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,\mathrm{e}]$.

- *Bornes :* on a $\begin{cases} t=0 \Leftrightarrow u = \mathrm{e}^0 = 1, \\ t=1 \Leftrightarrow u = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}. \end{cases}$
- *Bloc différentiel :* on a $t = \ln u$, donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u$. Comme $\dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1}$, on a

$$\begin{aligned} J = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u &= [\ln(u) - \ln(u+1)]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \ln\mathrm{e} - \ln(1+\mathrm{e}) - (\ln 1 - \ln 2) \\ &= 1 + \ln\frac{2}{1+\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

3. Calcul de $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, avec le changement de variable $x = \sin u$.

La fonction $\psi : u \mapsto \sin u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,1]$.

- *Bornes :* on a $\begin{cases} x=0 \Leftrightarrow u = 0, \\ x=1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- *Bloc différentiel :* on a $\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$.

Ainsi, par changement de variable, on a

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u,$$

car pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos u \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2 u} = |\cos u| = \cos u$.

Il reste à calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u$. On sait que pour tout u, on a $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1$, donc

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[u + \frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

On peut d'ailleurs voir géométriquement que le calcul de K revient au calcul de l'aire d'un quart de disque de rayon 1, ce qui confirme le résultat (exercice : s'en convaincre).

III Fonctions continues par morceaux

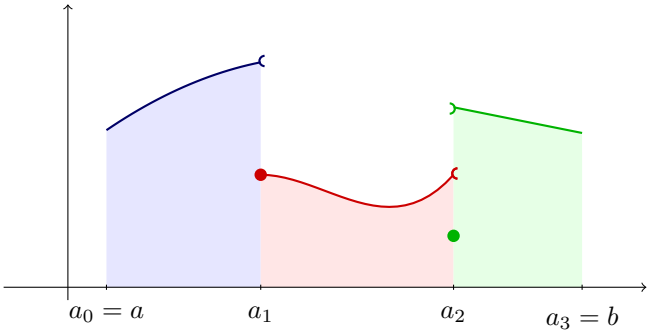
La définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle s'étend sans difficulté au cas de fonctions dites continues par morceaux, qui peuvent présenter des discontinuités.

Définition - Fonction continue par morceaux

Une fonction f est *continue par morceaux* sur le segment $[a,b]$ avec $a < b$ s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in]a,b[$ tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et on posant $a_0 = a$ et $a_{n+1} = b$,

1. la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ est continue,
2. la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Autrement dit, f est continue en tout point de $[a,b]$ différent des a_i et admet une limite à gauche et à droite en chacun des a_i (sauf en a et b où la limite existe uniquement d'un côté).



Une fonction continue par morceaux

Définition - Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soient f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ comme dans la définition ci-dessus. On définit l'intégrale de f entre a à b par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\tilde{f}_i$ désigne le prolongement continu de f à $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int_0^4 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^4 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_1^2 1\,\mathrm{d}t + \int_2^3 2\,\mathrm{d}t + \int_3^4 3\,\mathrm{d}t \;=\; 6.$$