Chapitre 16

Etude asymptotique des suites et séries

I Etude asymptotique des suites

Dans cette section, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites réelles.

1. Négligeabilité

Définition - Négligeabilité des suites

– *Cas où $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang* : on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

– *Cas général* : on dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que

$$u_n = v_n\varepsilon_n \quad \text{à partir d'un certain rang,} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(v_n)$ ou bien $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$, ou plus simplement $u = \mathrm{o}\,(v)$.

Il faut noter que dans la pratique, seule la première définition sera utile : les suites que nous considérerons seront toujours non nulles à partir d'un certain rang. C'est d'ailleurs ce que nous supposerons par la suite dans les démonstrations du cours.

Exemples.

1. $n = \mathrm{o}\left(n^3\right)$, car $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $n^2+3n+7 = \mathrm{o}\left(n^3\right)$, car $\dfrac{n^2+3n+7}{n^3} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{7}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\,(1)$, car $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\qquad 1 = \mathrm{o}\,(n)$, car $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

   $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\,(1)$, car $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\qquad 1 = \mathrm{o}\left(n^2\right)$, car $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4. $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, car $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$, on a $a^n = \mathrm{o}\,(b^n)$. En effet, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

⚠ « $= \mathrm{o}\,(\ )$ » n'est pas une vraie égalité ! Par exemple, $\frac{1}{n+n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n+n^3} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, mais $\frac{1}{n+n^2} \neq \frac{1}{n+n^3}$.

Remarque. On a $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ si et seulement si $|u_n| = \mathrm{o}\,(|v_n|)$.

Lorsqu'on a $u_n - v_n = \mathrm{o}\,(w_n)$, où $(w_n)_n$ est une suite réelle, on écrira

$$u_n = v_n + \mathrm{o}\,(w_n)\,.$$

En d'autres termes, on dit ici que $u = v + h$, où h est une suite réelle telle que $h_n = \mathrm{o}\,(w_n)$. Il faut comprendre ici que la suite u s'écrit comme la somme de la suite v et d'une certaine suite qui est négligeable par rapport à w.

Proposition - Caractérisation des suites convergentes

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $u_n = \mathrm{o}(1)$.
- Plus généralement, si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si $u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$.

Démonstration. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \dfrac{u_n-\ell}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n - \ell = \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$. □

Remarque. Le fait que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ ne préjuge en rien des limites de $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ en $+\infty$: elles peuvent tout à fait avoir la même limite. On a vu par exemple que $\frac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On peut récrire les résultats de croissances comparées de la manière suivante.

Proposition - Croissances comparées

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,
$$(\ln n)^\alpha = \mathrm{o}\left(n^\beta\right), \qquad n^\beta = \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right), \qquad \mathrm{e}^{\gamma n} = \mathrm{o}(n!)\,.$$
On en déduit alors :
$$\frac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^\alpha}\right), \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \qquad \frac{1}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\gamma n}}\right).$$

Exemple. Soient $\beta > 0$ et $q \neq 0$.
- Si $|q| > 1$, alors $n^\beta = \mathrm{o}(q^n)$.
- Si $|q| < 1$, alors $q^n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

En effet,
- si $|q| > 1$, on a $n^\beta = \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{n \ln |q|}\right)$ car $\ln|q| > 0$, donc $n^\beta = \mathrm{o}(|q|^n) = \mathrm{o}(q^n)$,
- si $0 < |q| < 1$, on a $\gamma = -\ln|q| > 0$, donc $|q|^n = \mathrm{e}^{n\ln|q|} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Proposition - Règles de calcul

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors
- $\lambda a_n = \mathrm{o}(b_n)$,
- si $\lambda \neq 0$, $a_n = \mathrm{o}(\lambda b_n)$.

ii. Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ et $c_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $a_n + c_n = \mathrm{o}(b_n)$.

iii. Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{o}(c_n)$, alors $a_n = \mathrm{o}(c_n)$.

iv. Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ et que $c_n = \mathrm{o}(d_n)$, alors $a_n c_n = \mathrm{o}(b_n d_n)$.

v. Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $a_n c_n = \mathrm{o}(b_n c_n)$.

Ces règles de calcul découlent directement de la définition.

Exemples.

1. $\ln n = \mathrm{o}(n)$ et $n = \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$ donc $\ln n = \mathrm{o}(\mathrm{e}^n)$.
2. on a $\ln n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$ donc $n \ln n = \mathrm{o}\left(n^{3/2}\right)$.

2. Equivalence

Nous introduisons ci-dessous la notion d'équivalence pour deux suites, qui traduit le fait que deux suites ont même comportement au voisinage de $+\infty$.

Définition - Suites équivalentes

- *Cas où $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang* : on dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites *équivalentes* si
$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
- *Cas général* : on dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites équivalentes s'il existe une suite (α_n) telle que
$$u_n = v_n\alpha_n \ \text{ à partir d'un certain rang}, \quad \text{et} \quad \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou bien $u_n \sim v_n$.

Comme pour la négligeabilité, la première définition sera suffisante pour la suite, pour les mêmes raisons que précédemment. Nous supposerons donc qu'on est dans ce cas dans les démonstrations qui suivent.

Remarque. Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.

Exemples.

- On a $n^2+3n+7 \sim n^2$: en effet, $\dfrac{n^2+3n+7}{n^2} = 1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On a $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$: en effet, $\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On a $\ln n + \cos n \sim \ln n$: en effet, $\dfrac{\ln n + \cos n}{\ln n} = 1 + \dfrac{\cos n}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, car $\left|\dfrac{\cos n}{\ln n}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\ln n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. On peut généraliser le résultat du premier exemple ci-dessus : si $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ avec $a_p \neq 0$, alors
$$P(n) \ = \ a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0 \ \sim \ a_p n^p.$$
On pourra utiliser ce résultat sans justification.

Proposition - Caractérisation de la convergence vers un réel non nul avec l'équivalence

Si $\ell \in \mathbb{R}^\star$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad u_n \sim \ell.$$

Démonstration. Comme $l \neq 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Leftrightarrow\ \dfrac{u_n}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \ \Leftrightarrow\ u_n \sim \ell$. □

⚠ Si $\ell = 0$, le résultat n'est pas vrai ! Les seules suites qui vérifient $u_n \sim 0$ sont les suites nulles à partir d'un certain rang, c'est-à-dire les suites qui stationnent en 0.

Proposition - Lien équivalence - négligeabilité

$$u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + \mathrm{o}\,(v_n)\,.$$

Démonstration. $u_n - v_n = \mathrm{o}\,(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \sim v_n.$ □

La proposition précédente exprime qu'un équivalent cache toujours un $\mathrm{o}\,()$. Bien qu'il ne soit pas écrit, il est important de le garder à l'esprit.

Remarque. Ce résultat permet de déterminer des équivalents en montrant que des termes d'une somme sont négligeables par rapport à l'un d'entre eux.

Exemple. $n - (\ln n)^2 \sim n$, car $(\ln n)^2 = \mathrm{o}\,(n)$ (croissance comparée), donc $n - (\ln n)^2 = n + \mathrm{o}\,(n) \sim n$.

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple de $n^3 + \ln n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Proposition - Equivalence et limite

Si $u_n \sim v_n$, alors

- soit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont la même limite, finie ou infinie,
- soit elles n'ont pas de limite.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $v_n = u_n \dfrac{v_n}{u_n}$. Comme $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a bien le résultat. □

On peut donc déterminer la nature d'une suite en considérant un équivalent plus simple de cette suite.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 + \ln n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $u_n \sim n^3$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Soit $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$ un polynôme avec $a_p \neq 0$. Comme $P(n) \sim a_p n^p$, la limite de la suite $\big(P(n)\big)_n$ est celle de son terme dominant.

Remarque. Supposons que $u_n \sim v_n$ et que la suite $(v_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang. Alors la suite $(u_n)_n$ est aussi positive à partir d'un certain rang.

Proposition - Règles de calcul

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) des suites réelles telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$.

i. Produit. $a_n\, c_n \sim b_n\, d_n$.

ii. Inverse et quotient. Si (c_n) est non nulle à partir d'un certain rang, alors (d_n) l'est également, et

$$\frac{1}{c_n} \sim \frac{1}{d_n} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}.$$

iii. Puissance. Si $\lambda \in \mathbb{N}$, alors $a_n^\lambda \sim b_n^\lambda$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et (a_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, alors $a_n^\lambda \sim b_n^\lambda$.

iv. Transitivité. Si $a_n \sim b_n$ et que $b_n \sim c_n$, alors $a_n \sim c_n$.

Ces règles de calcul découlent directement de la définition. Exercice : écrire la démonstration rigoureusement.

Deux règles à ne pas oublier.

- ⚠ On ne somme JAMAIS des équivalents !

  Exemple. $n^2 + n \sim n^2$ et $(-n^2 + n) \sim -n^2$, mais $n^2 + n + (-n^2 + n) = 2n \not\sim 0$.

- ⚠ Sauf pour passer à une puissance fixée, on ne compose JAMAIS un équivalent !

  Exemple. $(n+1) \sim n$, mais $\mathrm{e}^{n+1} = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^n \not\sim \mathrm{e}^n$, donc on ne peut pas composer par la fonction exp.

Exemples.

1. Limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{16n^4 - 3n^3 + n^2 - 12n + 32}{(2n^2+3)^2}$:

   On a $16n^4 - 3n^3 + n^2 - 12n + 32 \sim 16n^4$, et $\left(2n^2+3\right)^2 = 4n^4 + 12n^2 + 9 \sim 4n^4$, donc $u_n \sim \dfrac{16n^4}{4n^4} = 4$.
   Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

2. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux polynômes avec $a_p \neq 0$ et $b_m \neq 0$. On a

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a_p\, x^p}{b_m\, x^m} = \frac{a_p}{b_m}\, x^{p-m}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé, calcul de la limite de $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!\,n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{1}{k!} \sim \frac{1}{k!},$$

Du fait que $n(n-1)\dots(n-k) \sim n^k$.

Les limites usuelles obtenues à l'aide de la dérivabilité des fonctions usuelles se reformulent ainsi.

Proposition - Equivalents usuels

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. On a :

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$ *i.e.* $\ln(1+u_n) = u_n + \mathrm{o}(u_n)$,
- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$ *i.e.* $\mathrm{e}^{u_n} = 1 + u_n + \mathrm{o}(u_n)$,
- $\sin(u_n) \sim u_n$ *i.e.* $\sin u_n = u_n + \mathrm{o}(u_n)$,
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$ *i.e.* $\cos u_n = 1 - \frac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(\frac{u_n^2}{2}\right)$,
- $\tan(u_n) \sim u_n$ *i.e.* $\tan u_n = u_n + \mathrm{o}(u_n)$,
- $\arctan(u_n) \sim u_n$ *i.e.* $\arctan u_n = u_n + \mathrm{o}(u_n)$,
- si $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$ *i.e.* $(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha\, u_n + \mathrm{o}(u_n)$.

⚠ Il faut bien justifier que la suite (u_n) tend vers 0 pour utiliser ces équivalents. Si ce n'est pas le cas, le résultat n'est pas vrai.

Remarque. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, les deux énoncés $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$ et $\mathrm{e}^{u_n} \sim 1 + u_n$ sont corrects, mais ne disent pas la même chose :

- $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$ se récrit $\mathrm{e}^{u_n} - 1 = u_n + \mathrm{o}(u_n)$, ou encore $\mathrm{e}^{u_n} = 1 + u_n + \mathrm{o}(u_n)$.
- $\mathrm{e}^{u_n} \sim 1 + u_n$ se récrit $\mathrm{e}^{u_n} \sim 1$ car $u_n = \mathrm{o}(1)$, finalement $\mathrm{e}^{u_n} = 1 + \mathrm{o}(1)$.

Le premier énoncé est donc plus précis, le second n'exprimant pas davantage que $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemples.

1. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$, $\quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 - 1 \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$.

2. Équivalent de $\ln\left(2 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}}\right)$.

   On a $$\ln\left(2 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}}\right) = \ln\left(1 + \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}}\right)\right) \sim 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}} \quad \text{car } 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   $$\sim \frac{1}{n^2} \quad \text{car } -\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Limite de la suite de terme général $u_n = \frac{n^2\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)}{\sqrt{4n^2+1}}$.

   $$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{4n^2+1}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n^2}{\sqrt{4n^2+1}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2},$$

   car $4n^2+1 \sim 4n^2$, donc $\sqrt{4n^2+1} \sim \sqrt{4n^2} \sim 2n$, et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

4. Équivalent de $v_n = \frac{\sin\frac{2}{n+3}}{n^2 \tan\frac{3}{(n+5)^2}}$.

$$\text{Comme } \frac{2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{3}{(n+5)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ on a } v_n \sim \frac{\frac{2}{n+3}}{n^2\frac{3}{(n+5)^2}} = \frac{2}{n+3}\underbrace{\frac{n^2+10n+25}{3n^2}}_{\sim\frac{1}{3}} \sim \frac{2}{3n}.$$

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}, \text{ or } n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim n\frac{x}{n} = x \text{ donc } n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x, \text{ et } \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x.$$

Exercice 2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Solution. $\ln(u_n) = \ln\left(v_n\frac{u_n}{v_n}\right) = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \sim \ln(v_n)$ car $\frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \mathrm{o}(v_n)$.

Ce résultat ne figure pas au programme, et doit être démontré s'il est utilisé. Dans la pratique, on pourra procéder comme dans la preuve ci-dessus : lorsqu'on cherche un équivalent d'une expression de la forme $\ln(u_n)$, on commence par factoriser u_n par un équivalent simple.

II Séries numériques

1. Généralités

Définition - Série

On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Pout tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que S_n est la somme partielle de rang n de la série.
- Comme la série $\sum u_n$ est donnée par la suite $(S_n)_n$, elle est convergente si $(S_n)_n$ converge, et divergente sinon.

Remarques.

- Le rang initial d'une série n'est pas toujours 0, mais peut être tout entier n_0, on note alors la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

  Exemple. La série dite harmonique est la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.
- Pour toute série $\sum u_n$, de sommes partielles notées S_n, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Définition - Somme et restes

Soit $\sum u_n$ une série convergente.

- On appelle *somme* de la série la limite de $(S_n)_n$, qu'on note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- On appelle *reste d'ordre* n de la série $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, noté $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarques.

- Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou non.
- La nature de la série $\sum u_n$ ne change pas si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n).
- On ne peut parler de somme et de restes que pour une série convergente.

- ⚠ *Attention* à ne pas confondre $\sum u_n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Comme pour une suite, on ne peut écrire la somme d'une série qu'après avoir justifié sa convergence.

Exemples.

1. Étude de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}$: on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Ainsi, la série est convergente, de somme $\frac{3}{2}$.
2. Étude de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$: on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la série est divergente.
3. Étude de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$: on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Ainsi, la série est convergente, de somme 1.

Proposition

Si $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration. Si $\sum u_n$ converge, la suite $(S_n)_n$ converge vers un réel S. Ainsi, $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. □

Remarques.

- ⚠ La réciproque est fausse ! On peut avoir $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $\sum u_n$ diverge. Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

  En effet : on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

  $$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

  car pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$.
  Si la suite $(H_n)_n$ convergeait vers un réel H, on aurait $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H - H = 0$, ce qui n'est pas vrai d'après ce qui précède. Ainsi, la série diverge.
- Par contraposée, si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série *diverge grossièrement*.

Exemples. Les séries $\sum \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\sum (n-2^n)$ et $\sum (-1)^n$ divergent grossièrement.

Proposition - Lien suites-séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$(u_n) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$, donc la suite des sommes partielles $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ a même nature que la suite $(u_{n+1})_n$, elle a donc même nature que $(u_n)_n$. □

Ce résultat est souvent utilisé, dans un sens comme dans l'autre : pour déterminer la nature d'une suite à partir d'une série, ou d'une série à partir d'une suite. Dans la pratique, il faut penser à ce résultat lorsqu'on est confronté à une série de la forme $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$.

2. Opérations sur les séries

Proposition - Opérations et séries

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda u_n)$ ont même nature. Si elles convergent, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge également, et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

⚠ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien en déduire sur la nature de $\sum(u_n + v_n)$.

Par exemple, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\frac{1}{n}$ sont divergentes, mais $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = 0$ converge.

3. Séries de référence

Les exemples de séries détaillés dans cette partie sont à connaître par cœur : ils serviront de référence pour montrer la convergence ou la divergence d'autres séries.

a. Séries géométriques

Proposition - Convergence des séries géométriques

Soit x un réel. La série $\sum x^n$, appelée *série géométrique*, converge si et seulement si $|x| < 1$.
Dans ce cas,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Démonstration.

- Si $|x| \geqslant 1$, alors $(|x|^n)$ ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si $|x| < 1$, alors $x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et
$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{1-x}, \quad \text{donc la série converge,}$$
$$R_n \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x} - S_n \;=\; 1 - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \;=\; \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
□

Exemple. La série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$, converge, et sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Proposition - Séries géométriques dérivées

Soit x un réel. Les séries $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$, appelées *séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2*, convergent si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{donc on a aussi} \quad f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, si $|x| < 1$, alors $f_n'(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$. On a donc montré que $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$. En dérivant à nouveau, on peut montrer le résultat pour la deuxième somme. Ce point est laissé en exercice. □

Exemple. La série $\sum n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, et sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\times 9 = 6.$$

b. Série exponentielle

Proposition - Convegence de la série exponentielle

Pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$, appelée *série exponentielle* converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Cette proposition sera démontrée dans un chapitre à venir.

Exemple. En particulier, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

c. Séries de Riemann

Théorème - Critère de Riemann

Soit α un réel. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée *série de Riemann* converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Voir paragraphe sur la comparaison série-intégrale. □

Exemples. Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ convergent, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

4. Séries à termes positifs

L'étude des séries à termes positifs, ou plus généralement des séries dont le terme général ne change pas de signe, est rendue souvent aisée par les résultats qui suivent.

Proposition - Nature des séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ses sommes partielles est croissante, et

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée,}$$
$$\sum u_n \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite (S_n) est croissante. Le critère de convergence des suites monotones donne alors que (S_n) converge si et seulement si elle est majorée, et diverge vers $+\infty$ sinon. □

Remarque. Si $\sum u_n$ à termes positifs est convergente, alors (S_n) est majorée par la somme de la série : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Les critères qui suivent permettent d'étudier la nature d'une série à termes positifs en se ramenant aux séries de référence. En cas de convergence, ils ne donnent pas la valeur de la somme de la série.

Proposition - Critère de comparaison

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

i. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

ii. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

⚠ Le résultat est faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, si $u_n = -n$ et $v_n = 0$ pour tout n, $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k$. Le résultat découle donc directement du théorème de comparaison appliqué aux suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. □

Exemples.

1. Nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^3+3n+27}$.

   La série est à termes positifs, et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n^3+3n+27} \leqslant \frac{1}{n^3}$. Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, $\sum \frac{1}{n^3+3n+27}$ converge.

2. Nature de la série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$.

   La série est à termes positifs, et pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

3. Nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^3 \ln n}$.

   La série est à termes positifs, et pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{1}{n^3 \ln n} \leqslant \frac{1}{n^3}$. Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, $\sum \frac{1}{n^3 \ln n}$ converge.

4. Nature de la série $\sum \sin \dfrac{1}{n^2}$.

   La série est à termes positifs car pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n^2} \in [0,1]$ et sin est positive sur $[0,1]$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sin \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, du fait que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème - Critère de négligeabilité

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

i. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

ii. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

⚠ Le critère est faux également si les séries ne sont pas à termes positifs.

Démonstration. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang :

> Pour tout n, u_n s'écrit $u_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $v_n - u_n = v_n - \varepsilon_n v_n = (1-\varepsilon_n)v_n$, or $v_n \geqslant 0$ et $1 - \varepsilon_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $1 - \varepsilon_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang, et $v_n - u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

Ainsi, le critère de comparaison précédent permet de conclure. □

Méthode - Utiliser le critère de comparaison par négligeabilité

Objectif : se ramener à une série de Riemann convergente pour montrer la convergence. Pour cela, on essaie de trouver $\alpha > 1$ tel que
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$
La série $\sum u_n$ est alors convergente d'après le critère de comparaison par négligeabilité.

Exemple.

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n^3}$: la série est à termes positifs, et on a $n^2 \frac{\ln n}{n^3} = \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $\frac{\ln}{n^3} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ aussi.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n^2}$: la série est à termes positifs, et on a $n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^3} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $\frac{\ln}{n^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ aussi.
- $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$: la série est à termes positifs, et on a $n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ aussi.

Théorème - Critère de comparaison par équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Supposons que $\sum v_n$ converge. On sait que comme $u_n \sim v_n$, $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$. Autrement dit, $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = \mathrm{o}(v_n)$. Ainsi, d'après le critère de comparaison par négligeabilité, la série $\sum w_n$ converge. Par conséquent, la série $\sum(v_n + w_n)$ converge, c'est-à-dire la série $\sum u_n$ converge. De même, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
On a donc montré : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ converge, c'est-à-dire que les séries sont de même nature. □

⚠ Le critère d'équivalence ne renseigne que sur la nature des séries, il ne donne *pas* de résultat d'équivalence des sommes partielles.

Exemples. Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$:

   La série est à termes positifs, or
   $$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}.$$
   Comme $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente, la série diverge.

2. $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$:

   La série est à termes positifs, or
   $$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$
   Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente, la série converge.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{2^n - n}$:

   La série est à termes positifs, or
   $$\frac{1}{2^n - n} \sim \frac{1}{2^n}.$$
   Comme $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série convergente, la série converge.

Remarque. Si la suite $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang, les critères ci-dessus s'appliquent à la série $\sum u_n$: nous avons vu que la nature de la série est inchangée si on change un nombre fini de termes de la série.

Méthode - Bilan : pour étudier la nature d'une série à termes positifs

1. On regarde (rapidement) si le terme général tend vers 0. Sinon, la série diverge grossièrement.
2. On regarde si la série n'est pas télescopique.
3. On la compare avec une série de référence (Riemann, géométrique, exponentielle) et on utilise les critères

de comparaison, équivalence ou négligeabilité.

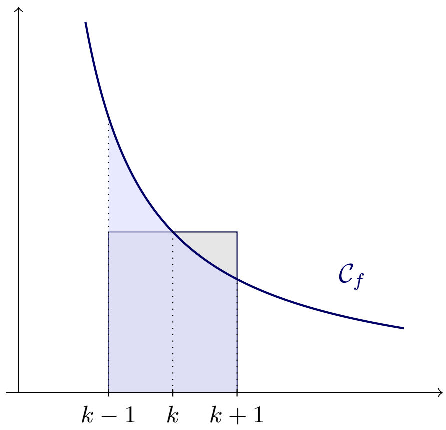
Si on doit montrer la convergence et calculer la somme de la série, on peut directement étudier la limite des sommes partielles.

Si $\sum u_n$ est à termes négatifs, on utilise les méthodes précédentes avec la série à termes positifs $\sum(-u_n)$.

5. Comparaison série-intégrale

L'idée est de comparer une série à une intégrale qu'on sait calculer pour en déduire sa nature. Ceci est possible notamment lorsque la série s'écrit $\sum f(n)$, où f est une fonction continue, positive, monotone sur $\mathbb{R}_+$, dont une primitive est connue.

Le principe repose sur la remarque suivante : considérons le cas où f est décroissante (le cas croissant est analogue), dans ce cas, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$:



- pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(t)$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{donc} \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k}^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t, \quad \text{donc} \quad \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme cette relation est vraie pour tout entier k, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\int_{1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\star)$$

par la relation de Chasles.

On peut utiliser cette relation pour déterminer la nature de la série dans certains cas :

- si $\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit de $(\star)$ que $\sum f(n)$ diverge,
- si $\int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie ℓ, on déduit de $(\star)$ que $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \ell$, et donc $\sum f(n)$ converge, car c'est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées.

Preuve du critère de Riemann.

- Si $\alpha = 1$: pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{t}, \quad \text{donc} \quad \int_{k}^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \textit{i.e.} \quad \frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

par croissance de l'intégrale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on obtient en sommant les relations obtenues :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Comme $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient pat comparaison que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

– Si $\alpha > 1$: pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\forall t \in [k-1, k],\ \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}, \quad \text{donc} \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad \textit{i.e.} \quad \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

par croissance de l'intégrale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, on obtient en sommant les relations obtenues :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1}.$$

Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ a ses sommes partielles majorées, elle converge.

– Si $\alpha < 1$: on peut raisonner à nouveau par comparaison avec une intégrale, ou on peut plus simplement utiliser la divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ n^\alpha \leqslant n, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne que, comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge également.

Exercice 3. *Série de Bertrand.* Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

6. Séries absolument convergentes

Définition - Série absolument convergente

Soit (u_n) une suite de nombres réels. La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème - Convergence d'une série absolument convergente

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration. Supposons que la série $\sum |u_n|$ converge. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|.$$

Ainsi, par comparaison, la série à termes positifs $\sum (u_n + |u_n|)$ converge. Comme la série $\sum (-|u_n|)$ converge, la somme des deux séries $\sum (u_n + |u_n| - |u_n|) = \sum u_n$ converge, d'où le résultat. □

Exemple. Nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

On a $|u_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Définition - Série semi-convergente

Une série qui est convergente sans être absolument convergente est dite *semi-convergente*.

Exemple. Montrons que la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

– *La série n'est pas absolument convergente.* En effet, on a $|u_n| = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme on sait que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum |u_n|$ diverge.

– *Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.*

  ◇ La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante : si $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0.$$

◇ La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante : si $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} \;=\; \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \;=\; -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \;\geqslant\; 0.$$

◇ On a $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: en effet, $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On sait donc que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes, et convergent vers la même limite ℓ.

– *La série est convergente.* On déduit du point précédente que (S_n) converge vers ℓ, donc la série converge, elle est donc semi-convergente.

L'exemple ci-dessus est en fait beaucoup plus général : la preuve de la convergence s'applique à toute série de la forme $\sum(-1)^n u_n$, où la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. On appelle ces séries des *séries alternées*.

Le résultat suivant permet d'utiliser les critères de comparaison de la partie précédente lorsqu'on compare une série quelconque à une série à termes positifs.

Proposition - Comparaison avec une série à termes positifs

Soient $\sum u_n$ une série quelconque et $\sum v_n$ une série à termes positifs.

i. si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

ii. si $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

iii. si pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. *i.* Comme la suite (v_n) est positive et $u_n \sim v_n$, on sait que (u_n) est positive à partir d'un certain rang n_0. On peut donc appliquer le résultat de comparaison sur les séries à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} v_n$.

ii. Comme on a $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$, on a aussi $|u_n| = \mathrm{o}\,(|v_n|)$. Comme $\sum |v_n| = \sum v_n$ converge, la série $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

iii. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |v_n|$, alors la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |v_n|$ implique celle de $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |u_n|$ par comparaison. Ainsi, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente. □