Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie et somme directe

I Dimension d'un espace vectoriel

1. Espace de dimension finie

Définition - Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel est dit *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice de cardinal fini (le nombre d'éléments est fini). Dans le cas contraire, il est dit *de dimension infinie.*

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie car leurs bases canoniques respectives sont de cardinal fini.
2. La famille vide engendre $\{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est de dimension finie.
3. $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie.

   En effet, si $\mathbb{R}[x]$ est engendré par une famille finie $(P_1, \ldots, P_n)$, on note d le degré du polynôme de plus haut degré parmi $P_1, \ldots, P_n$. On remarque alors que $x^{d+1} \notin \operatorname{Vect}(P_1, \ldots, P_n)$: en effet, si $P \in \operatorname{Vect}(P_1, \ldots, P_n)$, alors $\deg P \leqslant d$. Il y a donc contradiction.

Le théorème suivant (admis) fournit un nombre maximal de vecteurs pour une famille libre, et un nombre minimal pour une famille génératrice dans un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, qui admet une famille génératrice de cardinal n, alors

- toute famille libre de E a au plus n vecteurs,
- toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

Rappel. *Ajout d'un vecteur à une famille libre.* Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E et $u \notin \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, alors

la famille $(e_1, \ldots, e_n, u)$ est libre.

On peut en déduire le résultat suivant, qui exprime qu'on peut compléter une famille libre avec des vecteurs d'une famille génératrice pour obtenir une base.

Théorème - de la base incomplète / de la base extraite

Si E un espace vectoriel de dimension finie,

- on peut compléter toute famille libre de E en une base de E,
- on peut extraire de toute famille génératrice de E une base de E.

Démonstration. La remarque ci-dessus fournit un moyen algorithmique de compléter $(e_1, \ldots, e_k)$ en une base. Comme E est de dimension finie, il existe une famille génératrice finie $(u_1, \ldots, u_m)$ de E. On peut alors procéder de la manière suivante : on pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_k)$, puis, tour à tour pour chacun des u_i :

- si $u_i \notin \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, alors on ajoute le vecteur à $\mathscr{B}$, qui est alors encore libre d'après la remarque,
- si $u_i \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, on ne modifie pas $\mathscr{B}$.

Lorsqu'on a terminé, on obtient une famille $\mathscr{B}$ qui est toujours libre, d'après ce qui précède. Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, soit u_i est un vecteur de $\mathscr{B}$, soit $u_i \in \text{Vect}(\mathscr{B})$. On en déduit que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E, c'est donc une base de E. $\square$

Remarque. Une conséquence importante de ce théorème est que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

On peut ainsi extraire une base d'une famille génératrice de E. Nous verrons plus tard comment le faire en pratique.

2. Dimension d'un espace vectoriel

D'après le théorème du paragraphe précédent, si E est un espace vectoriel qui admet une base de cardinal n, alors

- toute famille contenant strictement plus de n vecteurs est liée.
- toute famille contenant strictement moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

Par ailleurs, toute base de E a le même nombre de vecteurs.

Définition - Dimension

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *dimension* de E, notée $\dim E$, le nombre de vecteurs d'une de ses bases.

Si $\dim E = 1$, on dit que E est une droite vectorielle, et si $\dim E = 2$, on dit que E est un plan vectoriel.

Exemples.

- ◇ $\dim\{0_E\} = 0$.
- ◇ si $u \in E$ avec $u \neq 0_E$, alors $\dim(\text{Vect}(u)) = 1$: en effet, (u) est alors une base de $\text{Vect}(u)$.
- ◇ si u et v sont des vecteurs non colinéaires de E, alors $\dim(\text{Vect}\,(u, v)) = 2$. En effet, (u, v) est alors une base de $\text{Vect}(u, v)$.

Proposition - Dimension des espaces vectoriels de référence

i. $\dim \mathbb{R}^n = n$. *ii.* $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$. *iii.* $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Exemples.

1. Calcul de la dimension de $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(1) = P(0)\}$.

   On remarque que $P(x) = ax^2 + bx + c$ appartient à E ssi $a + b + c = c$, c'est-à-dire $b = -a$. Ainsi, les polynômes dans E sont exactement les polynômes de la forme $ax^2 - ax + c$, avec $a, c \in \mathbb{R}$. En d'autres termes,
   $$E \;=\; \{a(x^2 - x) + c,\ a, c \in \mathbb{R}\} \;=\; \text{Vect}(x^2 - x,\ 1).$$
   La famille échelonnée en degré $(x^2 - x,\ 1)$ est libre. Elle définit donc une base de E. On en déduit alors que $\dim E = 2$.

2. Calcul de la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 2y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}$. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors
   $$(x, y, z) \in F \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} -2\boxed{y} - 2z = 0 \\ \boxed{z} = -x \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \boxed{y} = x \\ \boxed{z} = -x \end{array}\right.$$
   Ainsi, les vecteurs de F sont exactement les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(x, x, -x)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Ceci s'écrit $F = \text{Vect}((1, 1, -1))$. Le vecteur non nul $(1, 1, -1)$ forme alors une base de F, et $\dim F = 1$.

Remarques.

- On peut donc affirmer que : s'il existe une famille libre de E de cardinal k, alors $\dim E \geqslant k$,
  s'il existe une famille génératrice de E de cardinal k, alors $\dim E \leqslant k$.
- Attention, si $\mathscr{F}$ est une famille de E et $\text{Card}\,\mathscr{F} \leqslant \dim E$, la famille $\mathscr{F}$ n'est pas forcément libre !

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

i. Une famille libre de cardinal n est une base de E.

ii. Une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Méthode - Montrer qu'une famille est une base

Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E dont on connaît la dimension n, il suffit de montrer *i.* ou *ii.* :

i. la famille est libre et contient n vecteurs.

ii. la famille est génératrice et contient n vecteurs.

Exemples.

– La famille $\big((1,2,0),\ (2,1,0),\ (0,0,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: on a

$$a\,(1,2,0)+b\,(2,1,0)+c\,(0,0,-1)=(0,0,0) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+2b=0\\ 2a+b=0\\ -c=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a+2b=0\\ -3b=0\\ -c=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$$

donc la famille $\big((1,2,0),\ (2,1,0),\ (0,0,-1)\big)$ est libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

– La famille $\big(P_0,\ P_1,\ P_2\big)$, où $P_0(x)=3$, $P_1(x)=5x-2$ et $P_2(x)=x^2-3x+2$, est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. En effet, la famille est libre car échelonnée en degré et ne contient que des polynômes non nuls, et de cardinal $3=\dim\mathbb{R}_2[x]$, donc c'est bien une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathscr{F}=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. La famille $\big(x^2-1,\ x^2+1,\ x-1,\ 1\big)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$?

3. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors,

i. F est de dimension finie et $\dim F\leqslant\dim E$.

ii. De plus si, $\dim F=\dim E$ alors $E=F$.

Démonstration. On considère une base $(e_1,\dots,e_k)$ de F. Ainsi, $(e_1,\dots,e_k)$ est une famille libre de E, ce qui entraîne que $\dim F=k\leqslant\dim E$.

Si on suppose de plus que $\dim E=\dim F=k$, alors $(e_1,\dots,e_k)$ est une famille libre de bon cardinal, donc une base de E. Finalement, $E=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_k)=F$. □

Remarques.

– Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors en appliquant la proposition précédente avec $E=G$, on obtient :

i. si $F\subset G$ alors $\dim F\leqslant\dim G$.

ii. si $F\subset G$ et $\dim F=\dim G$, alors $F=G$.

– *Application* : si $E=\mathbb{R}^3$ et F est un sev de E, alors $\dim F\in\{0,1,2,3\}$, et :

  – si $\dim F=0$, alors $F=\{0_E\}$.

- si $\dim F = 1$, alors F est une droite vectorielle engendrée par n'importe quel vecteur non nul de F.
- si $\dim F = 2$, alors F est un plan vectoriel engendré par tout couple de vecteurs non colinéaires de F.
- si $\dim F = 3$, alors $F = E = \mathbb{R}^3$.

Définition - Hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ est appelé un hyperplan de E.

Méthode - Montrer que deux sev sont égaux

Dans un espace de dimension finie, pour montrer que deux sev F et G sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset G$ et que $\dim F = \dim G$.

Exemple. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z = 0\}$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$ où $e_1 = (-2, 1, 1)$ et $e_2 = (1, -2, 1)$.

On a $F = \{(x, y, -x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, -1),\ (0, 1, 1))$. Comme $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 1)$ sont non colinéaires, ils forment une base de F, et $\dim F = 2$.

- Comme $e_1 \in F$ et $e_2 \in F$, on a $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset F$.
- Comme e_1 et e_2 sont non colinéaires, on a $\dim \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) = 2 = \dim F$.

On en déduit alors que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = F$.

4. Rang d'une famille

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle *rang* de la famille $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\,\mathscr{F}$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \;=\; \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) \;=\; \dim\left(\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)\right).$$

Remarque. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille de E, espace vectoriel de dimension n. On a :

- ◇ $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) \leqslant k$,
- ◇ $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) = n$ si seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice,
- ◇ $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) = k$ si seulement si $\mathscr{F}$ est libre,
- ◇ $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_k) = k = n$ si seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E.

Par définition du rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$, les opérations qui ne changent pas l'espace vectoriel engendré ne changent pas non plus le rang. Par conséquent, il est souvent possible de déterminer facilement le rang par la méthode du pivot de Gauss.

Exemple. Déterminons le rang de $\mathscr{F} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, où $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, 1, -1)$ et $u_3 = (-4, 1, 17)$.

$$\mathrm{rg}((1,1,2),\ (2,1,-1),\ (-4,1,17)) \;=\; \mathrm{rg}((1,1,2),\ \underbrace{(0,-1,-5)}_{=u_2-2u_1},\ \underbrace{(0,5,25)}_{=u_3+4u_1}) \;=\; \mathrm{rg}((1,1,2),\ (0,-1,-5)).$$

Par conséquent, on a $\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \leqslant 2$. Comme les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(0, -1, -5)$ sont non colinéaires, ils forment une famille libre. On en déduit que $\mathrm{rg}\,\mathscr{F} = 2$.

Remarques.

- Avec la méthode de l'exemple ci-dessus, on a extrait une base d'une famille génératrice car on trouve une famille libre et génératrice de l'espace vectoriel engendré.
- Le rang de $\mathscr{F}$ correspond au cardinal de la plus grande sous-famille libre contenue dans $\mathscr{F}$.

Exemples.

1. Quel est le rang de la famille $\left(x^2-1,\ x+1,\ x^2+x\right)$?
2. Quel est le rang de la famille $\left(x^2-1,\ x+1,\ x-1\right)$?

II Somme directe

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel qui n'est pas nécessairement de dimension finie, et F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition - Somme de deux sev

La *somme* de F et de G est l'ensemble, noté $F+G$, défini par

$$F+G=\{u+v,\ u\in F,\ v\in G\}.$$

Remarques.

- De manière évidente : $F+G=G+F$.
- Attention à la notation, qui n'est pas l'addition usuelle. Par exemple, $F+G=F+H$ n'implique pas $G=H$.

Proposition

La somme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient F et G. En d'autres termes

$$F+G \;=\; \mathrm{Vect}(F\cup G).$$

Démonstration. Montrons le résultat par double inclusion.

- Montrons que $F+G\subset \mathrm{Vect}(F\cup G)$: si w est un élément de $F+G$, alors $w=u+v$, avec $u\in F$ et $v\in G$. Comme $u+v$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $F\cup G$, on a bien $w\in \mathrm{Vect}(F\cup G)$.

- Montrons maintenant que $\mathrm{Vect}(F\cup G)\subset F+G$: si $w\in \mathrm{Vect}(F\cup G)$, alors w est combinaison linéaire de vecteurs de $F\cup G$. Ainsi, w s'écrit $w=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n$, où pour tout i, $u_i\in F$ ou $u_i\in G$, et $\lambda_i\in\mathbb{R}$. Quitte à réordonner les u_i, on peut supposer que $u_1,\ldots,u_k\in F$, et $u_{k+1},\ldots,u_n\in G$. Ainsi,

$$w \;=\; \underbrace{\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k}_{\in F} \;+\; \underbrace{\lambda_{k+1}u_{k+1}+\ldots\lambda_nu_n}_{\in G} \;\in\; F+G. \quad \square$$

Exemples.

1. Soient $e_1=(1,0,0)$ et $e_2=(0,1,0)$. Si $F=\mathrm{Vect}\,(e_1)$ et $G=\mathrm{Vect}\,(e_2)$, alors

$$F+G=\{u+v,\ u\in \mathrm{Vect}(e_1),\ v\in \mathrm{Vect}(e_2)\}=\{ae_1+be_2,\ a,b\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(e_1,e_2).$$

2. Si $F=\{D\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ D \text{ diagonale}\}$, et $G=\mathrm{Vect}(M)$ où $M=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, alors

$$F+G \;=\; \left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\} \;=\; \left\{\begin{pmatrix}a&c\\0&b\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

   Finalement, $F+G$ est l'espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soient $E=\mathbb{R}[x]$, $F=\mathrm{Vect}\,\left(1,x^2\right)$ et $G=\mathrm{Vect}\,\left(x,x^3\right)$. Déterminons $F+G$.

   On a $F+G \;=\; \{(a+bx^2)+(cx+dx^3),\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\} \;=\; \{dx^3+bx^2+cx+a,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\} \;=\; \mathbb{R}_3[x]$.

La proposition ci-dessous généralise ce que l'on a observé dans les exemples 1 et 3 ci-dessus. Elle découle directement du fait que $F+G=\mathrm{Vect}\,(F\cup G)$.

Proposition - Famille génératrice d'une somme

Si $F=\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_k)$ et $G=\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_m)$, alors

$$F+G \;=\; \mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_m)\,.$$

Comme on a toujours $F+G \subset E$, il suffit de montrer que $E \subset F+G$ pour obtenir que $E = F+G$. On en déduit la méthode suivante.

Méthode - Montrer qu'un espace vectoriel est somme de deux sev

Pour montrer que $E = F+G$, il suffit de montrer que tout vecteur de E s'écrit comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

2. Somme directe

Définition - Somme directe

On dit que la somme de F et de G est *directe* si tout vecteur w de $F+G$ se décompose de manière unique sous la forme $w = u+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

Dans ce cas, la somme $F+G$ est notée $F \oplus G$.

On a généralement recours à la caractérisation suivante pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

Proposition - Caractérisation de la somme directe

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Remarque. Comme on a toujours $0_E \in F \cap G$, il suffira de montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ pour obtenir que $F \cap G = \{0_E\}$, et donc que F et G sont en somme directe.

Démonstration. Montrons le résultat par double implication.

- Supposons F et G en somme directe. Si $u \in F \cap G$, alors on a les deux décompositions suivantes pour u :

$$u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G}.$$

  Par unicité de la décomposition, on a $u = 0_E$, ce qui donne bien $F \cap G = \{0_E\}$.

- Si maintenant $F \cap G = \{0_E\}$, montrons que F et G sont en somme directe. On considère $w \in F+G$, et on suppose que w admet les deux décompositions $w = u+v = u'+v'$, avec $u, u' \in F$ et $v, v' \in G$. On a alors

$$u - u' = v' - v.$$

  Ceci implique que $u-u' \in G$, et donc $u - u' \in F \cap G$. Par hypothèse, ceci entraîne que $u - u' = 0_E$, c'est-à-dire que $u = u'$. Bien sûr, on a donc aussi $v = v'$. On a donc bien montré l'unicité de la décomposition, ce qui conclut. □

Exemples.

1. Soient $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0)$. On pose $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$. La somme $F+G$ est directe.

   En effet, si $u \in F \cap G$, alors
   - u s'écrit sous la forme αe_1 avec $\alpha \in \mathbb{R}$ du fait que $u \in F$,
   - u s'écrit sous la forme βe_2 avec $\beta \in \mathbb{R}$, du fait que $u \in G$.

   Ainsi, on a $u = \alpha e_1 = \beta e_2$, c'est-à-dire $(\alpha, 0, 0) = (0, \beta, 0)$, et on en déduit que $\alpha = \beta = 0$. Par conséquent, $u = (0,0,0)$, et on a bien $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $F+G$ est une somme directe.

2. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, qui sont deux sev de $\mathbb{R}_3[x]$. La somme $F+G$ est directe.

   En effet, supposons $P \in F \cap G$. Ainsi, le polynôme P a 0 pour racine, du fait que $P \in F$, et a 1, 2, 3 pour racines du fait que $P \in G$. P est donc un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ qui a 4 racines, c'est alors le polynôme nul. On a donc bien $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[x]}\}$, ce qui donne que $F+G$ est une somme directe.

3. Si $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}$. La somme $F+G$ est directe.

Supposons que $f \in F \cap G$. Comme $f \in G$, la fonction f est constante, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme par ailleurs $f \in F$, on a $f(0) = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$. Finalement, f est la fonction constante nulle. On a donc bien $F \cap G = \{0_E\}$, et la somme $F + G$ est directe.

3. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition - Sous-espaces supplémentaires

On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Autrement dit, F et G sont supplémentaires dans E si E est *somme directe* de F et G :

$$E = F \oplus G.$$

Caractérisation des sev supplémentaires.

Il découle immédiatement de la définition que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si

- ◇ $F + G = E$,
- ◇ $F \cap G = \{0_E\}$.

Méthode - Pour montrer que deux espaces sont supplémentaires

On commence par vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Puis :

- soit on montre que tout vecteur de E se décompose *de manière unique* comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G,
- soit on montre que
  - ◇ tout vecteur de E est la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G,
  - ◇ tout vecteur de $F \cap G$ est nul.

Exemples.

1. Soient $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (2, 1)$. On pose $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$. Alors, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

   En effet,

   - on a $F + G = \text{Vect}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$ car (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ donc une base de $\mathbb{R}^2$,
   - si $u \in F \cap G$, alors $u = ae_1$ avec $a \in \mathbb{R}$, et $u = be_2$ avec $b \in \mathbb{R}$, donc $ae_1 - be_2 = 0$, donc $a = b = 0$ car (e_1, e_2) est une base. Ainsi, $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

   Par conséquent, on a bien $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

2. Soient $F = \{D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ D \text{ est diagonale}\}$ et $G = \text{Vect}(A_1, A_2)$, où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   F et G sont des sev sont supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifions les deux conditions habituelles.

   - Comme $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$,
   $$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_2 - A_1}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathscr{M}_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

– Si $M \in F \cap G$, alors $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, mais aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & c+d \\ -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.
En identifiant, on obtient que $a = b = c = d = 0$, donc M est nulle. On a donc bien $F \cap G = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$.

Exercice 2. On note $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $F = \{f \in E,\ f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f \in E,\ f \text{ est impaire}\}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Remarques.

– Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est d'ailleurs jamais un espace vectoriel : il ne contient pas 0_E.

– Un supplémentaire n'est en général pas unique. Par exemple, n'importe quelle droite vectorielle différente de l'axe des ordonnées est un supplémentaire de l'axe des ordonnées. De même, dans l'espace, toute droite vectorielle n'appartenant pas à un plan vectoriel est supplémentaire de ce dernier.

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-espaces vectoriel de E :

$$F = \{f \in E,\ f \text{ est constante}\}, \quad \text{et} \quad G = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

4. En dimension finie

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie, et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Ils sont eux aussi de dimension finie, et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F, et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ une base de G.

Notation. Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_k)$ et $\mathscr{F}' = (v_1, \dots, v_m)$, on note $\mathscr{F} \cup \mathcal{F}'$ la famille

$$\mathscr{F} \cup \mathscr{F}' = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m).$$

On dit parfois que $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ est la concaténation des familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$.

Rappel. Comme $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \operatorname{Vect}(e'_1, \dots, e'_m)$, nous avons vu que $F + G = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_m)$. Autrement dit, la famille $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est génératrice de $F + G$. *Attention* : ce n'est pas toujours une base de $F + G$.

Théorème

Les sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est libre.

Dans ce cas, $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de $F + G$, et on dit que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.

Démonstration.

– Supposons que F et G sont en somme directe, et montrons que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est libre. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = 0_E$.

On a alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^m \mu_j e'_j \in G$, donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in F \cap G$. Comme $F \cap G = \{0_E\}$, on en déduit que $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0_E$. Comme $(e_1, \dots, e_k)$ est libre, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
De même, comme $\sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = 0_E$, on a $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. Ceci donne bien la liberté de la famille $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$, qui est alors une base de $F + G$.

– Supposons maintenant que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est libre, et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $u \in F \cap G$, on a donc $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$, et $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j$.

Ceci implique que $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^m \mu_j e'_j = 0_E$. Comme $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est libre, on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, donc $u = 0_E$, ce qui conclut.

Si $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est libre, on obtient directement que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de $F + G$ car on sait que $F + G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B} \cup \mathscr{B}')$, donc $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est toujours génératrice de $F + G$. $\square$

Méthode - Obtenir une base de $F \oplus G$

Si F et G sont en somme directe, pour obtenir une base de $F \oplus G$, il suffit de concaténer une base de F et une base de G.

Attention : toute base de $F \oplus G$ n'est pas nécessairement adaptée à la somme directe.

On déduit directement du théorème ci-dessus la méthode suivante pour montrer que F et G sont supplémentaires.

Méthode - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E

Pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de E.

En effet,

- si $E = F \oplus G$, alors $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de $F + G$, donc de E car $E = F + G$,
- si $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de E, alors $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B} \cup \mathscr{B}') = F + G$, donc $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de $F + G$. Ainsi, la somme est directe. Comme de plus $E = F + G$, on a bien $E = F \oplus G$.

Exemple. Reprenons l'exemple déjà rencontré plus haut : on se place dans $\mathbb{R}_3[x]$, et on considère $F = \mathrm{Vect}\left(1, x^2\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(x, x^3\right)$. On sait que $\mathscr{B} = (1, x^2)$ est une base de F, et $\mathscr{B}' = (x, x^3)$ une base de G.

$$\text{Comme } \mathscr{B} \cup \mathscr{B}' = (1, x^2, x, x^3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[x],\ F \oplus G = \mathbb{R}_3[x].$$

Proposition - Dimension d'une somme directe

Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. D'après le théorème précédent, si F et G sont en somme directe et si $\mathscr{B}$ est une base de F et $\mathscr{B}'$ une base de G, alors $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est une base de $F \oplus G$. Ainsi, $\dim F \oplus G = \mathrm{Card}\, \mathscr{B} \cup \mathscr{B}' = \dim F + \dim G$. □

La formule ci-dessous est une généralisation de la proposition ci-dessus, et sera démontrée en TD.

Théorème - Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

D'après ce qui précède, dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie, il est nécessaire d'avoir la relation $\dim F + \dim G = \dim E$ pour que F et G soient supplémentaires (mais pas suffisant !).

Proposition - Autres caractérisations des sommes directes

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors on a

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G, \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

On retiendra que pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer *seulement deux* assertions parmi les trois suivantes :

$$E = F + G, \qquad F \cap G = \{0_E\}, \qquad \dim E = \dim F + \dim G.$$

Exemples.

1. Reprenons l'exemple $F = \{D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ D \text{ diagonale}\}$ et $G = \operatorname{Vect}(A_1, A_2)$, où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Comme $\dim F = \dim G = 2$, on a $\dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = 4 = \dim F + \dim G$. Il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ pour en déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrons que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + 2y + z = 0\right\}$ et $G = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$ sont supplémentaires.

   – On a $F = \{(x, y, -3x - 2y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1, 0, -3), ((0, 1, -2))$. Comme les deux vecteurs précédents sont non colinéaires, ils forment une base de F, donc $\dim F = 2$. Par ailleurs, $\dim G = 1$. On a donc $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim F + \dim G$.

   – Par ailleurs, si $(x, y, z) \in F \cap G$, alors d'une part, $(x, y, z) = (x, x, x)$ et d'autre part, $0 = 3x + 2y + z = 6x$. Par conséquent, $x = 0$, donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. On a alors $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

   Finalement, F et G sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition - Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G. De plus, on a $\dim G = \dim E - \dim F$.

Démonstration. On sait qu'on peut compléter la base $\mathscr{B}$ de F en une base $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E. D'après ce qui précède, $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ sont supplémentaires dans E. On sait de plus que $\dim F + \dim G = \dim E$. $\square$