Chapitre 18

Compléments sur la dérivation

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et n un entier naturel.

I Dérivées successives

1. Définition

On définit les dérivées successives d'une fonction de manière récurrente.

Définition - Dérivées successives

On définit les dérivées successives de f sur I de la manière suivante par récurrence, lorsqu'elles existent.

- ⋆ On note $f^{(0)} = f$.
- ⋆ Si $n \in \mathbb{N}^\star$: si la fonction $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable sur I, on dit que f est n fois dérivable sur I, et on note $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemples.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto x^p$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$g^{(n)} : x \mapsto \begin{cases} p(p-1)\dots(p-n+1)\,x^{p-n} = \dfrac{p!}{(p-n)!}\,x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction inverse $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et
$$h^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}.$$

Définition - Classe $\mathscr{C}^n$, classe $\mathscr{C}^\infty$

- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I)$, ou encore $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$.
- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I)$, ou encore $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Exemple. Les fonctions polynomiales, les fonctions exp, cos, sin, arctan sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On a les inclusions $\mathscr{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathscr{C}^2(I) \subset \mathscr{C}^1(I) \subset \mathscr{C}^0(I)$. On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune égalité.

2. Opérations sur $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$

Par opérations sur les fonctions dérivables, on obtient directement la proposition suivante.

Proposition - Structure de $\mathscr{C}^n(I), \mathscr{C}^\infty(I)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En particulier, si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I)$) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I) \text{ (resp. } \mathscr{C}^\infty(I)) \quad \text{et} \quad (\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

Le théorème suivant donne la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit, et généralise le résultat bien connu de la dérivée d'un produit.

Proposition - Formule de Leibniz

Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I)$), alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I. De plus,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Démonstration. Par récurrence : exercice. □

Exemple. Soit $h : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$. La fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ comme produit des fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$, qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f^{(1)}(x) g^{(n-1)}(x) \\ &= x\,\mathrm{e}^x + n\mathrm{e}^x = (x+n)\,\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Proposition

i. Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I)$) et g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

ii. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$), alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

II Formules de Taylor

1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème - Formule de Taylor avec reste intégral

Soient f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. Pour tout x de I, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Remarques.

- On suppose f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ pour que $t \longmapsto f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$ soit continue et l'intégrale bien définie.
- Si $n = 0$, on retrouve
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$
c'est-à-dire le théorème fondamental de l'analyse.

Exemple. Montrons à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, au point $a = 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\ln(1+x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2} + \int_0^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f'(t) = \frac{1}{1+t}$, $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ et $f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$, on a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, et on déduit de ce qui précède que

$$\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \int_0^x \frac{2}{(1+t)^3} \frac{(x-t)^2}{2} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leqslant (x-t)^2$, donc $0 \leqslant \int_0^x \frac{2}{(1+t)^3} \frac{t^2}{2} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (x-t)^2 \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$, d'où

$$0 \leqslant \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{x^3}{3}.$$

On retrouve la formule de Taylor pour les polynômes, que nous avons déjà démontrée deux fois.

Corollaire - Formule de Taylor pour un polynôme

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n et $a \in \mathbb{R}$. On a pour tout réel x,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $x \mapsto P(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et vérifie $P^{(k)} = 0$ pour tout $k > n$. □

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition - Inégalité de Taylor-Lagrange

Soient f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$ pour tout $t \in I$. Alors, pour tout x de I, on a

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}\right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. On suppose que $x \geqslant a$ (le cas $x < a$ se traite de manière analogue). On peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}\right| = \left|\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \frac{|f^{(n+1)}(t)|\,(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t$$

par l'inégalité triangulaire. Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{M}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad \square$$

Remarques.

- Ce théorème reste vrai n'est pas une conséquence du théorème précédent car l'inégalité reste vraie avec des hypothèses plus faibles.
- Puisque f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue. Ainsi, si I est un segment, $f^{(n+1)}$ est nécessairement bornée par le théorème des bornes atteintes.

Une des applications primordiales de ce résultat est le développement en série de certaines fonctions usuelles.

Conséquence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 sur le segment I d'extrémités 0 et x.
Pour tout k, on a $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$. Par ailleurs, pour tout $t \in I$, on a $|f^{(n+1)}(t)| = \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x$, donc par la formule de Taylor-Lagrange,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \text{or} \qquad \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Par conséquent, $\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par comparaison. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$, d'où le résultat. □

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.

III Fonctions convexes et concaves

1. Définition

Définition - Fonctions convexes et concaves

⋆ Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

⋆ Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *concave* sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $t_1 + t_2 = 1$,

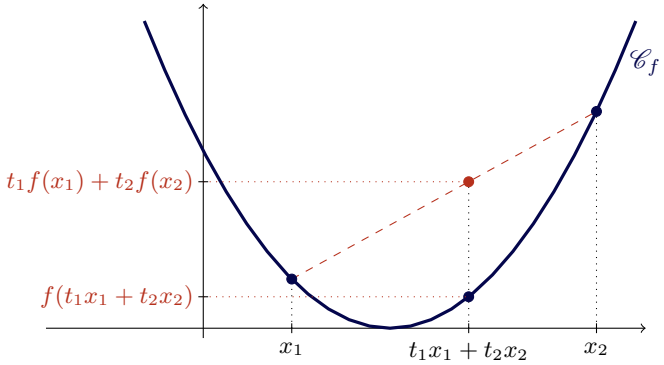
$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \geqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

Remarques.

- Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
- Une autre formulation de la définition d'une fonction convexe est : f est convexe sur I si pour tous $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- Si f est convexe sur I et $x, y \in I$, alors $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$, ou encore $f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \leqslant \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f(y)$.

Interprétation graphique. Le segment reliant les points de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est appelé *corde* de f entre x_1 et x_2. La définition ci-dessus exprime que f est convexe si sa courbe représentative est en-dessous de chacune de ses cordes.

En effet, les points du segment $[x_1, x_2]$ sont exactement les points qui s'écrivent $t_1 x_1 + t_2 x_2$, où $t_1, t_2 \in [0,1]$. Si $x = t_1 x_1 + t_2 x_2$ est un point du segment, alors $y = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$ est l'ordonnée du point d'abscisse x qui appartient à la corde. L'inégalité de la définition dit exactement que $f(x) \leqslant y$. Comme ceci est valable pour tout point du segment, ceci exprime bien que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la corde.



2. Inégalité de Jensen

Proposition - Inégalité de convexité généralisée ou inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur I. Si $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ avec $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$ et $x_1, \dots, x_n \in I$, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 2$, on note

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \text{pour tous } x_1, \dots, x_n \in I \text{ et } t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \ \text{ on a } f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- La propriété $\mathscr{P}(2)$ est vraie : c'est la définition de la convexité.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également. On a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k + t_{n+1} x_{n+1}\right) \leqslant f\left((1-t_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1} x_{n+1}\right).$$

Donc, en utilisant $\mathscr{P}(2)$, on obtient $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) \leqslant (1-t_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})$.

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{1-t_{n+1}} = \frac{1-t_{n+1}}{1-t_{n+1}} = 1$, donc $\mathscr{P}(n)$ donne $f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} f(x_k)$. Ainsi,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) \leqslant (1-t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1-t_{n+1}} f(x_k) + t_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} t_k f(x_k),$$

ce qui montre $\mathscr{P}(n+1)$, et conclut. □

Remarque. Sous les mêmes conditions, mais avec f concave, l'inégalité est : $f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$.

Exemple. Une application classique est l'inégalité dite arithmético-géométrique : si $x_1, \dots, x_n > 0$, alors

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Pour montrer ce résultat, nous allons admettre temporairement que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$. On observe alors que

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right),$$

car $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, et ln est concave. On obtient l'inégalité en composant par la fonction exp qui est croissante.

3. Caractérisation pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Nous admettons la proposition suivante qui fournit deux nouvelles caractérisations de la convexité, dans le cas où la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition - Caractérisations des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^1$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors

- f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I,

⋆ f est convexe sur I ssi la courbe $\mathscr{C}_f$ de f est au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire pour tous $x, a \in I$,

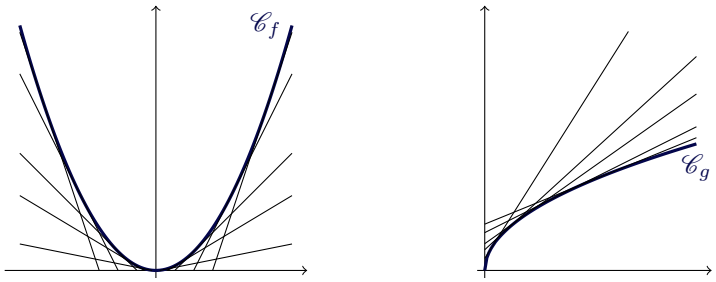
$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

Remarque. Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on a

$$f \text{ est concave} \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ est décroissante sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de ses tangentes.}$$

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $x \mapsto 2x$ est croissante, elle est donc convexe. De même que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$, et la fonction $h : x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.



2. La fonction exponentielle est convexe, la fonction logarithme est concave.

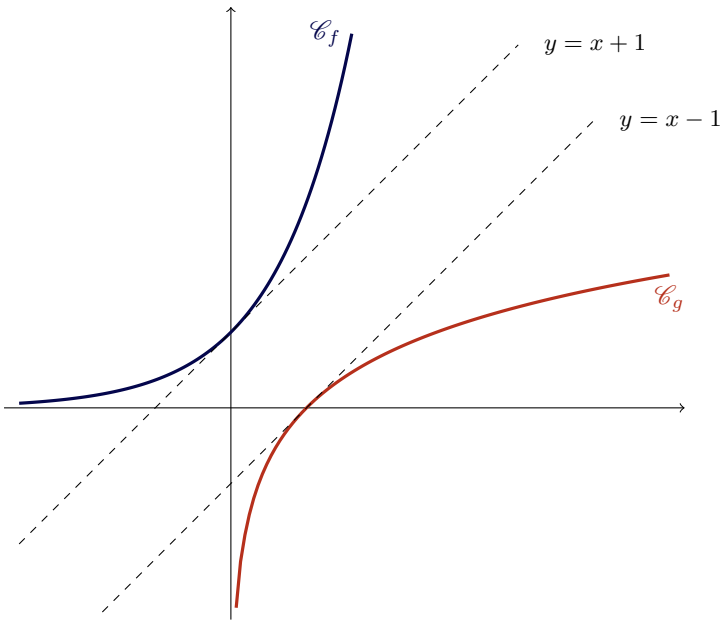
Applications.

1. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente au point 0, d'équation $y = 1 + x$, ce qui donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$

2. La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ étant concave sur $\mathbb{R}_+^\star$, sa courbe est en-dessous de sa tangente au point 1, d'équation $y = x - 1$, ce qui donne que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$



Exercice 3. Montrer que la fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

4. Caractérisation pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Lorsque la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$, on déduit directement de la proposition précédente le résultat qui suit.

Proposition

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors f est convexe sur I ssi f'' est positive sur I.

Remarque. Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, on a de manière analogue

$$f \text{ est concave sur } I \quad \Leftrightarrow \quad f'' \text{ est négative sur } I.$$

5. Point d'inflexion

Définition - Point d'inflexion

Soient f une fonction définie sur I et a un point de I qui n'est pas une extrémité de I. On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion de la courbe de* f si f passe en ce point de concave à convexe ou de convexe à concave.

Exemple. Le point $(0,0)$ est un point d'inflexion à la courbe de $f = \arctan$:

- pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,

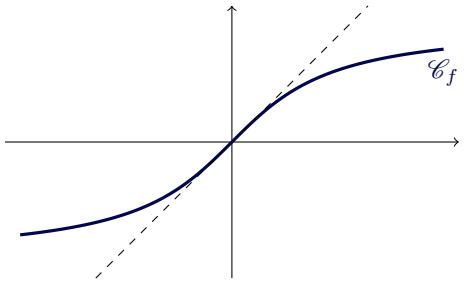
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \geqslant 0,$$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}_-$,

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leqslant 0,$$

donc f est concave sur $\mathbb{R}_+$.



Dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou de classe $\mathscr{C}^2$, on a les caractérisations suivantes.

- *Cas* $\mathscr{C}^1$: si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f si et seulement si la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a traverse la courbe.
- *Cas* $\mathscr{C}^2$: si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.