Chapitre 19

Variable aléatoires réelles discrètes et lois usuelles

Nous allons généraliser l'étude des probabilités au cas où l'univers est infini dénombrable. Dans ce cadre, certaines notions devront être adaptées et complétées.

I Espaces probabilisés

1. Univers et événements

On rappelle qu'on s'intéresse à l'étude d'expériences aléatoires, c'est-à-dire d'expériences dont l'issue peut varier si on les répète. L'ensemble des issues possibles est appelé l'univers et est noté Ω. À la différence des derniers chapitres de probabilités, nous ne supposerons plus Ω fini à partir de maintenant.

Exemples.

1. Dans le cas d'un lancer de pièce de monnaie, on peut choisir $\Omega = \{P, F\}$ comme univers.
2. Si on répète n fois cette expérience, l'univers est par exemple $\{P, F\}^n$ dans lequel une issue est un n-uplet d'éléments de $\{P, F\}$. Par exemple, $\omega = \underbrace{(P, F, \dots, P)}_{n \text{ coordonnées}}$ est une issue.
3. Si on effectue une infinité de lancers, l'univers est alors l'ensemble des suites d'éléments de $\{P, F\}$, c'est-à-dire $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$. Une issue est par exemple $\omega = \underbrace{(P, F, P, P, P, \dots)}_{\text{une infinité}}$.
4. On considère l'expérience qui consiste à lancer un dé à 6 faces jusqu'à obtenir 6, et à noter le nombre d'essais nécessaires pour y parvenir. Comme tout entier dans $\mathbb{N}^\star$ est un résultat possible, on choisit $\Omega = \mathbb{N}^\star$.

Définition - Ensemble des événements, espace probabilisable

L'ensemble $\mathscr{A}$ des événements associés à expérience aléatoire est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i. $\Omega \in \mathscr{A}$, c'est-à-dire que Ω est un événement.

ii. $\mathscr{A}$ est stable par union et par intersection dénombrable : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un événement, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ sont des événements, c'est-à-dire : } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}.$$

iii. $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathscr{A}$, alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est alors appelé *espace probabilisable*.

Remarques.

– En pratique, lorsque Ω est fini, on prend toujours $\mathscr{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements.

– Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{A}$, on rappelle que :

  ⋆ l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, aussi noté $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si pour tout n, A_n est réalisé,

  ⋆ l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, aussi noté $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est réalisé si et seulement si au moins l'un des A_n est réalisé.

Exemple. Un joueur joue à une jeu qui consiste en une succession de parties, et ne s'arrête que s'il gagne à l'une de ces parties. On note G_n l'événement : "le joueur gagne la n-ème partie", et G : "le joueur gagne l'une des parties". On a alors

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

On remarque qu'alors l'événement "le jeu s'arrête" est exactement l'événement G, et s'écrit donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Proposition - Distributivité et lois de Morgan généralisée

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements définis sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$, et $B \in \mathscr{A}$.

- *Distributivité* : on a $B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n)$, et $B \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cup A_n)$.
- *Lois de Morgan* : on a $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, et $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Définition - Système complet d'événements

On dit qu'une famille $(A_n)_{n\in I}$ d'événements, où $I \subset \mathbb{N}$, est un système complet d'événements lorsque :

- ⋆ les événements A_n sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$,
- ⋆ $\bigsqcup_{n\in I} A_n = \Omega$.

2. Probabilité

On étend la définition de probabilité finie vue précédemment au cas discret, plus général.

Définition - Probabilité

On appelle *probabilité* définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

- ⋆ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ⋆ σ-additivité : pour toute famille $(A_n)_{n\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, où $I \subset \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in I} A_n\right) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé.*

Remarques.

- ⋆ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge toujours. En particulier, si $(A_n)_n$ est un système complet d'événements, la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge et sa somme vaut 1.
- ⋆ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et $B \in \mathscr{A}$, alors $B = B \cap \Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$ par distributivité. On a par conséquent

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n).$$

Définition - Événements négligeables, événements presque sûrs

Solent $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $A \in \mathscr{A}$.

- ⋆ Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est *négligeable.*
- ⋆ Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est *presque sûr.*

3. Théorème de la limite monotone

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

i. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

ii. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right).$$

Démonstration. On présente la preuve du premier point, celle du deuxième point s'en déduisant en considérant la suite $(\overline{A}_n)$. On introduit les événements
- $\star$ $B_0 = A_0$,
- $\star$ $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Ce choix assure que les événements B_n sont deux à deux incompatibles (disjoints), et que $\bigcup_n A_n = \bigsqcup B_n$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})) \quad \text{car } A_{k-1} \subset A_k, \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad \square
\end{aligned}$$

Une conséquence directe du théorème de la limite monotone est le corollaire suivant.

Corollaire

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right), \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Démonstration. Le résultat découle alors directement du théorème de la limite monotone : la suite d'événements $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_n$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)_n$ est décroissante pour l'inclusion. $\square$

Exemple. On effectue une infinité de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. L'univers est donc $\Omega^{\mathbb{N}} = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$. On s'intéresse à l'événement F : "on obtient au moins une fois Face". Pour $k \in \mathbb{N}$, on introduit l'événement F_k : "on obtient Face au $k$ème lancer". On remarque que

$$F = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \;:\; F \text{ est réalisé ssi au moins un des } F_k \text{ l'est.}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{F}_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{F}_1\right)\dots\mathbb{P}\left(\overline{F}_n\right) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

par indépendance des lancers. Ainsi, par le corollaire du théorème de la limite monotone ci-dessus, on a

$$\mathbb{P}(F) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = 1.$$

L'événement F est donc presque sûr. On dit alors qu'on obtient au moins une fois Face presque sûrement. De même, on montre qu'on obtient au moins une fois Pile presque sûrement.

4. Formule des probabilités totales

Nous énonçons une adaptation de la formule des probabilités totales dans le cas d'un système complet d'événements qui peut compter une infinité d'événements.

Théorème - Formule des probabilités totales

Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements et $B \in \mathscr{A}$, alors

i. $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$,

ii. si $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)$.

Remarque. Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$, alors $\mathbb{P}(B \cap A_n) = 0$. On peut donc considérer que $\mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n) = 0$. Dans la pratique, on peut alors appliquer la formule même si les $\mathbb{P}(A_n)$ ne sont pas tous non nuls.

Formule de Bayes. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables, et $B \in \mathscr{A}$ non négligeable. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne directement :

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(B)}.$$

5. Indépendance

On généralise la notion d'indépendance au cas d'une suite d'événements.

Définition - Evénements indépendants

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- ⋆ On dit que des événements A et B de $\mathscr{A}$ sont *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

- ⋆ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On dit que ces événements sont *mutuellement indépendants* si pour toute partie finie $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ non vide de $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

II Variables aléatoires réelles discrètes

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1. Définition

Définition - Variable aléatoire réelle discrète

Une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une *variable aléatoire réelle discrète* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si

- ⋆ $X(\Omega)$ est une partie finie : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, ou l'ensemble des termes d'une suite : $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
- ⋆ pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x]$ est un événement, *i.e.* $[X = x] \in \mathscr{A}$.

Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire discrète *finie* et si $X(\Omega)$ est infini, on dit que X est une variable aléatoire discrète *infinie*.

Proposition

Si X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$, alors pour tous réels x et y,

$$[X = x],\ [X \leqslant x],\ [X < x],\ [X \geqslant x],\ [X > x] \text{ appartiennent à } \mathscr{A},$$

Remarque. On en déduit qu'on a aussi $[x \leqslant X \leqslant y] \in \mathscr{A}$, $[x < X < y] \in \mathscr{A}$, $[x < X \leqslant y] \in \mathscr{A}$, etc.

Définition - Loi d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète. La *loi de* X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et des valeurs $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple. Considérons une puce qui se déplace sur les sommets d'un triangle, notés 1,2,3. La puce part au temps 0 du sommet 1 et à chaque instant, la puce est obligée de sauter sur un autre sommet avec équiprobabilité. Le chemin parcouru par la puce peut être représenté par une suite d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ par exemple

$$\omega = (1, 2, 1, 3, 2, 3 \ldots).$$

Ainsi, $\Omega = \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$.

- ⋆ La variable X_2 donnant la position de la puce au temps 2 est une variable aléatoire discrète car $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Dans notre exemple, $X_2(\omega) = 1$.
- ⋆ La variable aléatoire Y donnant le premier instant où la puce arrive en 3 est discrète car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^\star$. Dans notre exemple, $Y(\omega) = 3$.
- ⋆ La variable aléatoire Z donnant le premier temps de retour en 1 est discrète car $Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Dans notre exemple, $Z(\omega) = 2$.

Exercice 1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z de l'exemple précédent.

Proposition - Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. La famille $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ forme un *système complet d'événements*, dit *associé à la variable discrète* X. Par conséquent,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ = \ 1.$$

Exercice 2. Vérifier que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ pour la variable aléatoire Z de l'exemple précédent.

Remarque. Soit $I \subset \mathbb{N}$. On suppose que :
- ⋆ pour tout $n \in I$, $u_n \geqslant 0$,
- ⋆ $\sum\limits_{n \in I} u_n = 1$.

Alors, $(u_n)_{n \in I}$ définit une loi de probabilité : il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace telle que $X(\Omega) = I$ et $\mathbb{P}(X = n) = u_n$ pour tout $n \in I$.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \ = \ 1 - \frac{1}{n+1} \ \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ 1, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} \ = \ 1.$$

2. Indépendance de variables aléatoires discrètes

Définition - Variables aléatoires discrètes indépendantes

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- $\star$ Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$,
$$\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) \ = \ \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y).$$
- $\star$ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que ces variables aléatoires sont *mutuellement indépendantes* si pour tous $x_1 \in X_1(\Omega),\ x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) \ = \ \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k = x_k\right).$$

3. Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

a. Définition

Rappel. Si X est une variable aléatoire réelle *finie* avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors l'espérance de X est donnée par
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathbb{P}(X = x_k).$$

Définition - Espérance

On dit qu'une v.a.r. discrète X admet une espérance si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x)$ converge absolument.
On appelle alors *espérance de* X la somme de cette série :
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x).$$
Dans le cas particulier où $X(\Omega) = \mathbb{N}$, X admet une espérance si $\sum_{k \geqslant 0} k\,\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument, et dans ce cas
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X = k).$$

Exemples.

1. On lance indéfiniment et de manière indépendante une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Pour une issue ω, on pose
$$X(\omega) \ = \ \begin{cases} \text{numéro du premier lancer où on obtient Pile si on obtient au moins une fois Pile,} \\ 0 \text{ si on n'obtient jamais Pile.} \end{cases}$$
On note F_k : “on obtient Face au $k^{\text{ème}}$ lancer”. X définit une variable aléatoire dont la loi est donnée par :
   - $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X = k) \ = \ \mathbb{P}\left(F_1 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap \overline{F}_k\right) \ = \ \mathbb{P}(F_1) \ldots \mathbb{P}(F_{k-1})\,\mathbb{P}(\overline{F}_k) \ = \ (1-p)^{k-1}p$, par indépendance des lancers.
   Par ailleurs, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, comme déjà prouvé à l'aide du théorème de la limite monotone [1].

1. Ceci peut d'ailleurs se voir en remarquant que par somme d'une série géométrique convergente, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \ = \ 1$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0$.

Comme la série $\sum k(1-p)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée convergente, la série $\sum k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge. Ainsi, X admet une espérance, donnée par

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p \;=\; p\,\frac{1}{(1-(1-p))^2} \;=\; \frac{p}{p^2} \;=\; \frac{1}{p}.$$

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de probabilité donnée par $Y(\Omega)=\mathbb{N}^\star$, et $\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$.

   Comme la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(Y=k) \;=\; \sum\limits_{k\geqslant 1} k\,\frac{1}{k(k+1)} \;=\; \sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k+1}$ est divergente, Y n'admet pas d'espérance.

Remarques.

- Les variables discrètes finies admettent toujours une espérance. Comme on vient de le voir, ce n'est pas toujours le cas pour les variables discrètes infinies.
- Si $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ alors le terme général $k\,\mathbb{P}(X=k)$ de la série est positif, et la convergence absolue est donc équivalente à la convergence.

$b.$ Théorème de transfert

Théorème - Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle. La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(X=x)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) \;=\; \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(X=x).$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $\quad \mathbb{E}\big(g(X)\big) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(k)\,\mathbb{P}(X=k).$

Exemples.

1. Si X est une v.a.r. discrète, alors X^2 admet une espérance ssi la série $\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\,\mathbb{P}(X=x)$ est absolument convergente, ce qui équivaut à la convergence, du fait que la série est à termes positifs.
2. Reprenons la variable aléatoire Y définie dans le paragraphe précédent, et intéressons-nous à la variable aléatoire $\sqrt{Y}$. La série

$$\sum_{k\geqslant 1}\sqrt{k}\,\mathbb{P}(Y=k) \;=\; \sum_{k\geqslant 1}\frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} \quad \text{est convergente, car} \quad \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} \sim \frac{1}{k^{3/2}}.$$

   Ainsi, $\sqrt{Y}$ admet une espérance.

$c.$ Propriétés de l'espérance

Les propriétés de linéarité, de positivité et de croissance déjà rencontrées sont toujours valables pour des variables aléatoires discrètes quelconques, à condition que l'espérance existe. Ces résultats sont admis.

Proposition - Linéarité de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant chacune une espérance. Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX+bY$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y).$$

Proposition - Positivité et croissance de l'espérance

i. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. On suppose que X est *positive*, c'est-à-dire que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Alors, on a
$$\mathbb{E}(X) \geqslant 0.$$

ii. Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y admettant chacune une espérance. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ (qu'on note aussi $X \leqslant Y$). Alors, on a
$$\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

Théorème - Existence d'une espérance par domination

Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y telles que $0 \leqslant |X| \leqslant Y$. Si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. De plus, on a dans ce cas
$$|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

d. Variable aléatoire centrée

Définition - Variable aléatoire centrée

Une variable aléatoire est dite *centrée* lorsqu'elle admet une espérance, et $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proposition - Variable aléatoire centrée associée à X

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée et est appelée *variable aléatoire centrée associée à X*.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$. □

4. Variance d'une variable aléatoire réelle discrète

a. Définitions

Définition - Moment d'ordre 2

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet un moment d'ordre 2 lorsque la variable aléatoire X^2 admet une espérance. Le réel $\mathbb{E}(X^2)$ est alors appelé *moment d'ordre 2 de X*.

Remarque. Dans le cas très courant où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si la série $\sum k^2\, \mathbb{P}(X = k)$ converge. Dans ce cas,
$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\, \mathbb{P}(X = k).$$

Proposition–Définition - Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors la variable $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ admet une espérance. Celle-ci est appelée *variance de X* et notée $\mathbb{V}(X)$:
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (x_k - \mathbb{E}(X))^2\, \mathbb{P}(X = x_k),$$

où $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. On appelle par ailleurs *écart-type* de X, noté $\sigma(X)$ le réel positif défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque. La variance et l'écart-type sont des réels positifs ou nuls qui mesurent la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de son espérance. Si la variance est faible, les valeurs sont resserrées autour de l'espérance. Si la variance est élevée, elles sont au contraire très dispersées.

Dans la pratique, le calcul de la variance s'effectue généralement à l'aide du résultat suivant, déjà rencontré dans le cadre des variables aléatoires finies.

Proposition - Formule de Koenig-Huygens

Si X est une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, alors on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

Exemple. On reprend l'exemple où on lance indéfiniment et de manière indépendante une pièce qui donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$, et on considère à nouveau la variable aléatoire X qui correspond au numéro du premier lancer où on obtient Pile.

Comme on l'a vu, $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$, et $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. Par ailleurs, X admet une espérance, et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. Intéressons-nous à la variance de X. On a

$$\sum_{k\geqslant 1} k^2\,\mathbb{P}(X=k) \;=\; p\sum_{k\geqslant 1} \underbrace{k^2}_{k(k-1)+k} (1-p)^{k-1} \;=\; p\left(\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-1} + \sum_{k\geqslant 1} k(1-p)^{k-1}\right).$$

Comme les deux séries géométriques ci-dessus convergent, on en déduit que X admet un moment d'ordre 2, et

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; p\left((1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}\right) \;=\; p\left((1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{(1-(1-p))^2}\right) \;=\; \frac{2-p}{p^2}.$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2, et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$. On a donc $\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \;=\; \frac{1-p}{p^2}$.

b. Propriétés de la variance

Proposition - Propriétés de la variance

Soient X une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre 2 et a, b deux réels. Alors

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X), \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Définition - Variable aléatoire réduite et centrée réduite

- ⋆ Une variable aléatoire réelle est dite *réduite* si sa variance existe, et est égale à 1.
- ⋆ Une variable aléatoire réelle est dite *centrée réduite* si elle est centrée et réduite.

Proposition - Variable aléatoire centrée réduite associée à X

Si X est une variable aléatoire réelle qui a un moment d'ordre 2, et telle que $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite et est appelée *variable aléatoire centrée réduite associée à* X.

Démonstration.
- Par la linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$.
- Les propriétés de la variance donnent par ailleurs $\mathbb{V}\left(\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{(\sigma(X))^2}\,\mathbb{V}(X - \mathbb{E}(X)) = \frac{\mathbb{V}(X)}{(\sigma(X))^2} = 1$. □

5. Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

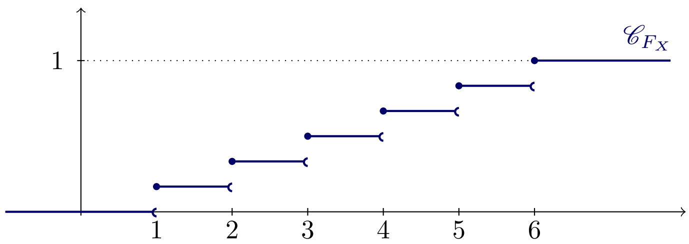
Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k \leqslant x} [X = k]\right) = \sum_{k \leqslant x} \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. On lance un dé équilibré à 6 faces, et on note X la variable aléatoire désignant le numéro obtenu. On sait que X suit alors la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$. On a $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$ si $x < 1$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \frac{1}{6}$ si $x \in [1, 2[$, etc.

Plus généralement, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \frac{k}{6}$ si $x \in [k, k+1[$ avec $k \leqslant 5$, et $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1$ si $x \geqslant 6$. On obtient la fonction de répartition suivante.



Proposition

Soit X une variable aléatoire discrète. Pour tous réels a et b avec $a \leqslant b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a).$$

En particulier, si X est à valeurs entières, alors pour toute valeur $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}([X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$ car $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant b]$. Ainsi, $\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
Dans le cas où les valeurs prises par X sont des entiers, on a, pour tout $k \in X(\Omega)$, $[X = k] = [k-1 < X \leqslant k]$, d'où le deuxième résultat. $\square$

Exercice 3. On tire simultanément deux boules au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geqslant 2$). On appelle S la variable aléatoire correspondant au plus grand des numéros obtenus. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, déterminer $F_S(k)$, puis donner la loi de S.

Proposition - Propriétés des fonctions de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors

i. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

ii. F_X est continue à droite en tout réel : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} F_X(x_0)$.

iii. $F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, et $F_X(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Remarque. On peut montrer que $\mathbb{P}(X < x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x)$, de telle sorte qu'on a alors

- ⋆ $\mathbb{P}(X = x_0) \neq 0$ ssi x_0 est un point de discontinuité de F_X,
- ⋆ si $x_0 \in X(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(X \leqslant x_0) - \mathbb{P}(X < x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x)$.

Théorème - La fonction de répartition caractérise la loi

Si X et Y sont des v.a.r. discrète, alors X et Y ont la même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition : $F_X = F_Y$. Autrement dit, la fonction de répartition d'une v.a.r. caractérise sa loi.

Remarque. La preuve se déduit de la remarque ci-dessus : si $F_X = F_Y$, alors on obtient que X et Y prennent les mêmes valeurs : $X(\Omega) = Y(\Omega)$, et pour chacune de ces valeurs x_0, on a

$$\mathbb{P}(X = x) \;=\; F_X(x_0) - \lim_{x\to x_0^-} F_X(x) \;=\; F_Y(x_0) - \lim_{x\to x_0^-} F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y = x).$$

Réciproquement, si X et Y ont même loi : $\forall x \in \mathbb{R},\;\; \mathbb{P}(X \leqslant x) \;=\; \sum_{\substack{y\in X(\Omega)\\ y\leqslant x}} \mathbb{P}(X = y) \;=\; \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ y\leqslant x}} \mathbb{P}(Y = y) \;=\; \mathbb{P}(Y \leqslant y)$.

III Lois usuelles

1. Lois discrètes finies : rappels et compléments

a. Variable aléatoire certaine

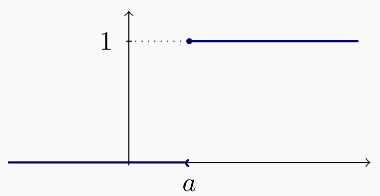
Rappel. Une variable aléatoire est certaine lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur a. La loi est alors donnée par

- ⋆ $X(\Omega) = \{a\}$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Espérance et variance. Si X suit la loi certaine, de support $\{a\}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = a, \qquad \mathbb{V}(X) = 0.$$

Fonction de répartition. Allure de la courbe de F_X :



b. Loi uniforme

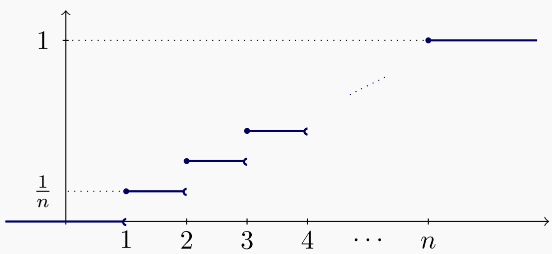
Rappel. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si sa loi est donnée par :

- ⋆ $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Espérance et variance. Si X suit la loi $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Fonction de répartition. Allure de la courbe de F_X :



Cas général. La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, où a et b sont des entiers avec $a < b$ si

$$X - a + 1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket),$$

c'est-à-dire si sa loi est donnée par :

- ⋆ $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$ pour tout $k \in \llbracket a, b \rrbracket$.

Espérance et variance. Si X suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Simulation de lois uniformes.

On suppose la librairie `numpy.random` importée avec le préfixe `rd` et la librairie `numpy` importée avec le préfixe `np`. On peut simuler les loi uniformes de deux manières.

- ⋆ On peut utiliser `rd.rand()`, qui renvoie un réel choisi au hasard dans $[0, 1[$: `np.floor(n*rd.rand())` simule dans X une réalisation de la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

  On peut adapter : `np.floor((b-a+1)*rd.rand())+a` simule une réalisation de la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
- ⋆ On peut utiliser la commande prédéfinie `rd.randint` :
  - `rd.randint(n)` renvoie une simulation de la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ avec $\in \mathbb{N}^*$.
  - `rd.randint(a,b)` renvoie une simulation de la loi uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$ pour des entiers a et b.
  - `rd.randint(a,b,N)` renvoie N simulations de la loi uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$.

c. Loi de Bernoulli

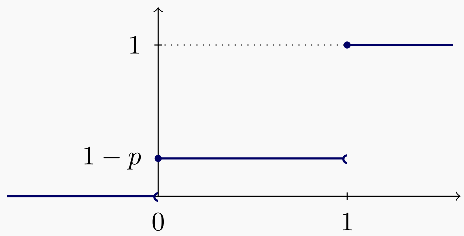
Rappel. Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si sa loi est donnée par :

- ⋆ $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Espérance et variance. Si X suit la loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$, alors

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Fonction de répartition. Allure de la courbe de F_X :



Rappel. On appelle *épreuve de Bernoulli* de paramètre $p \in [0, 1]$ toute expérience aléatoire ayant deux issues possibles : le succès de probabilité p, et l'échec de probabilité $1 - p$.

Une variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec, lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemples.

1. On lance une pièce équilibrée. La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on obtient *Pile*, et qui prend la valeur 0 si on obtient *Face*, suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

2. On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on fait un 6, et qui prend la valeur 0 sinon, suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Définition - Indicatrice

Soit A un événement de $\mathscr{A}$. On appelle indicatrice de A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ donnée par

$$\mathbb{1}_A(\omega) \quad = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En d'autres termes, $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si A est réalisé, et 0 sinon.

On remarque que si A est un événement, alors

- ⋆ $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$,
- ⋆ $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.

Par conséquent, $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Remarque. Si A est un événement négligeable, alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire presque sûrement égale à 0, et si A est un événement presque sûr, alors $\mathbb{1}_A$ est une presque sûrement égale à 1.

Simulation d'une loi de Bernoulli.

On suppose la librairie `numpy.random` importée avec le préfixe `rd`. On peut simuler la loi de Bernoulli de deux manières.

- ⋆ On peut utiliser la commande `rd.rand()`, qui renvoie un réel choisi au hasard dans $[0, 1]$:

```
if rd.rand()<p:
    X=1
else:
    X=0
```

- ⋆ On peut utiliser la commande prédéfinie `rd.binomial` :
  - `rd.binomial(1,p)` renvoie une simulation de la loi de Bernoulli de paramètre p.
  - `rd.binomial(1,p,N)` renvoie N simulations de la loi de Bernoulli de paramètre p.

d. Loi binomiale

Rappel. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in [0, 1]$ si sa loi est donnée par :

- ⋆ $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Espérance et variance. Si X suit la loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Remarques.

- D'après la formule du binôme de Newton, on a bien $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
- Une loi de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres 1 et p.

Loi binomiale et loi de Bernoulli. On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ si et seulement si X

s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \text{où } X_1, \ldots, X_n \text{ sont indépendantes, de loi } \mathscr{B}(p).$$

Exemple. On lance n fois une pièce, donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $1-p$. La variable aléatoire X égale au nombre de *Pile* obtenus suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Simulation d'une loi binomiale.

On suppose la librairie `numpy.random` importée avec le préfixe `rd`. On peut simuler la loi binomiale de paramètres n et p de deux manières.

- ⋆ On peut utiliser `rd.rand()` :

```
X=0
for i in range(n):
    if rd.rand()<p:
        X=X+1
```

Ceci peut par ailleurs s'écrire de manière plus condensée `X=sum(rd.rand(n)<p)`.

- ⋆ On peut utiliser la commande prédéfinie `rd.binomial` :
  - `rd.binomial(n,p)` renvoie une simulation de la loi binomiale de paramètres n et p.
  - `rd.binomial(n,p,N)` renvoie N simulations de la loi binomiale de paramètres n et p.

2. Lois discrètes infinies

a. Loi géométrique

Expérience aléatoire associée. On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli identiques de manière indépendante, et on note X le nombre d'essais effectués pour obtenir le premier succès.

Définition - Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi géométrique de paramètre* p si :

- ⋆ $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Remarque. La série $\sum \mathbb{P}(X=k) = p\sum(1-p)^{k-1}$ converge : on reconnaît une série géométrique convergente, et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \;=\; p\,\frac{1}{1-(1-p)} \;=\; 1,$$

ce qui justifie qu'on a bien défini une loi de probabilité. Ceci montre également que lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre, l'événement "obtenir au moins un succès" est presque sûr, comme nous l'avions précédemment montré à l'aide du théorème de la limite monotone.

Exemple. On lance indéfiniment un dé équilibré à 6 faces. Si la variable aléatoire X correspond au numéro du premier lancer où on a obtenu 6, alors X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathscr{G}(p)$

Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{G}(p)$. Alors, X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. La preuve de ce résultat a déjà été traitée dans les exemples des paragraphes précédents. □

Simulation de la loi géométrique.

On suppose la librairie `numpy.random` importée avec le préfixe `rd`. On peut simuler la loi géométrique de paramètre p de deux manières.

- ⋆ On peut utiliser `rd.rand()` :

```
X=1
while rd.rand()>p:
    X=X+1
```

- ⋆ On peut aussi utiliser la commande prédéfinie `rd.geometric` :
  - `rd.geometric(p)` renvoie une simulation de la loi géométrique de paramètre p.
  - `rd.geometric(p,N)` renvoie N simulations de la loi géométrique de paramètre p.

b. Loi de Poisson

Il n'y a pas de modèle probabiliste pour une loi de Poisson, par opposition aux autres lois vues ci-dessus, mais on verra plus tard que cette loi permet d'approcher la loi binomiale lorsque p est petit. Il faut donc voir cette loi comme une loi "limite".

Définition - Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi de Poisson* de paramètre λ, si :

- ⋆ $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- ⋆ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque. Comme $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$, on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

Proposition - Espérance et variance de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$

Soient $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors, X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. Exercice : à savoir faire ! □

Simulation de la loi de Poisson.

On suppose la librairie `numpy.random` importée avec le préfixe `rd`. On simule la loi de Poisson avec la commande prédéfinie `rd.poisson` :

- `rd.poisson(lamb)` renvoie une simulation de la loi de Poisson de paramètre `lamb`.
- `rd.poisson(lamb,N)` renvoie N simulations de la loi de Poisson de paramètre `lamb`.