

Chapitre 20

Comparaison locale des fonctions et développements limités

I Comparaison locale des fonctions

Dans cette partie, on élargit les notions de négligeabilité et d'équivalence à des fonctions.

1. Voisinage d'un point

Définition - Voisinage

Soit I un intervalle.

- ★ Soit $a \in I$. On appelle *voisinage de a dans I* un intervalle de la forme $]b, c[\cap I$ avec $b < a < c$.
- ★ Un *voisinage de $+\infty$ dans I* est un intervalle de la forme $]b, +\infty[$ inclus dans I .
- ★ Un *voisinage de $-\infty$ dans I* est un intervalle de la forme $] -\infty, c[$ inclus dans I .

Dans la suite, f, g et h désignent trois fonctions définies sur un voisinage V de a dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a \in I \cup \{\pm\infty\}$.

2. Négligeabilité

a. Définition

Définition - Négligeabilité

On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a . On dit que f est *négligeable devant g en a* si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, ou $f(x) = o_a(g(x))$, ou plus simplement $f = o_a(g)$.

On écrit parfois $f = o(g)$ sans préciser le point a lorsque le contexte est clair.

Cas général : plus généralement, quelle que soit la fonction g , on dit que f est négligeable devant g en a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que

- ★ $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in V$,
- ★ $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Exemples.

$$1. \quad x^2 + \sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^3) \text{ et } (x-1)^2 \underset{x \rightarrow 1}{=} o(\sqrt{x-1}).$$

En effet, $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{5/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par ailleurs, $\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{3/2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

$$2. \quad \text{Si } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ avec } \alpha < \beta, \text{ alors } x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \text{ et } x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha).$$

En effet, $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\beta - \alpha > 0$. Par ailleurs $\frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ car $\beta - \alpha > 0$.

$$3. \quad \text{On a } f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \text{ si et seulement si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0, \text{ et de manière plus générale pour } \ell \in \mathbb{R},$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{ssi} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1).$$

⚠ Comme dans le cas des suites, il convient de prendre garde à cette notation : il ne faut pas voir l'écriture $= o()$ comme une vraie égalité. Par exemple, on a $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$ et $x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$, mais bien sûr $x^2 \neq x$.

Les résultats sur les croissances comparées peuvent être réécrits de la manière suivante.

Proposition - Croissances comparées

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- au voisinage de $+\infty$: $(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$, et $x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\gamma x})$,
- au voisinage de 0^+ : $|\ln x|^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Exemple. On a $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{x^2})$.

En effet, par croissances comparées on a $\frac{\sqrt{y}}{e^y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, et $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{x}{e^{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, ce qui conclut.

b. Règles de calcul

Les règles de calcul suivantes découlent directement de la définition.

Proposition - Règles de calculs

Au voisinage de a , on a les propriétés suivantes.

- i. Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$, alors $\alpha f + \beta g = o(h)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ii. Si $f = o(g)$, alors $fh = o(gh)$.
- iii. Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$ (*transitivité*).

Remarque. En particulier, on a les relations suivantes.

- ★ $o(f) \pm o(f) = o(f)$. Par exemple, $o(x) - o(x) = o(x)$.
- ★ Si $f = o(g)$, alors $o(f) + o(g) = o(g)$.

Exemples.

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$, alors $f(x) + g(x) = x + x^2 + o(x^2)$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2)$, alors $f(x) \ln x = x \ln x + o(x^2 \ln x)$.
- On a $o(x) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

3. Equivalence

a. Définition

Définition - Equivalence des fonctions

On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a , avec dans ce cas $f(a) = 0$. On dit que f est équivalente à g en a si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, ou $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, ou plus simplement $f \underset{a}{\sim} g$. On note parfois $f \sim g$ sans préciser le point a lorsque le contexte est clair.

Cas général : plus généralement, quelle que soit la fonction g , on dit que f est équivalente à g en a s'il existe une fonction α définie sur un voisinage V de a telle que

$$\star f(x) = \alpha(x)g(x) \text{ pour tout } x \in V,$$

$$\star \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

Exemples.

1. On a $x^2 + 1 + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$, et $x^2 + 1 + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

En effet, $\frac{x^2+1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = x^3 + x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, et $\frac{x^2+1+\frac{1}{x}}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

2. Une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus bas degré en 0 et à son terme de plus haut degré en $+\infty$.

Proposition - Caractérisation de la convergence vers un réel non nul avec l'équivalence

Soient f une fonction réelle et $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{ssi} \quad f(x) \underset{a}{\sim} \ell.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $\ell \neq 0$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ssi $\frac{f(x)}{\ell} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. □

⚠ Comme pour les suites, si $\ell = 0$, le résultat n'est pas vrai : $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ veut dire que f est nulle au voisinage de a .

Proposition - Equivalence et négligeabilité

Soient f et g deux fonctions réelles. On a

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \text{ssi} \quad f \underset{x \rightarrow a}{=} g + o(g).$$

Démonstration.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f est de la forme $f = \alpha g$ sur un voisinage V de a , où $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. En posant $\varepsilon : x \mapsto \alpha(x) - 1$, on a alors $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$ car $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- Si $g \underset{x \rightarrow a}{=} g + o(g)$, alors f est de la forme $f = g + \varepsilon g$ sur un voisinage de a , où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. On pose cette fois $\alpha : x \mapsto 1 + \varepsilon(x)$, et on obtient que $f = \alpha g$ au voisinage de a , avec $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. □

Remarque. Comme pour les suites, si $f \underset{a}{\sim} g$ et g est positive sur un voisinage de a , alors f est positive sur un voisinage de a .

Proposition - Calcul de limite à l'aide d'un équivalent

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple. Si $P : x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré p ($a_p \neq 0$), alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p$. Ainsi, la limite de P en $+\infty$ est donnée par le terme dominant.

b. Règles de calcul

Les règles de calcul suivantes découlent directement de la définition.

Proposition - Règles de calcul

Soient trois fonctions f, g et h définies au voisinage de a telles que $f \underset{a}{\sim} g$. On a :

- Symétrie : $g \underset{a}{\sim} f$.
- Transitivité : si de plus $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
- Produit : $fh \underset{a}{\sim} gh$.

- Quotient : si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a , $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
- Puissance : si $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.
- Puissance réelle : si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que g est strictement positive au voisinage de a , $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
- Si $h \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$, alors $h \underset{x \rightarrow a}{=} o(f)$.
- Si $g \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$, alors $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(h)$.

⚠ Comme pour les suites, il faut bien garder à l'esprit les règles suivantes.

- L'équivalence n'est pas compatible avec la somme : on ne somme pas des équivalents !

Par exemple, $x + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ et $2 - x \underset{+\infty}{\sim} -x$, mais $2 + \frac{1}{x} \not\underset{+\infty}{\sim} 0$.

- L'équivalence n'est pas compatible avec la composition : on ne compose pas les équivalents !

Par exemple, $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $e^{x+1} \not\underset{+\infty}{\sim} e^x$, car $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$ pour tout x .

Exemple. Étude de la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{x^3 - e^x + 3}{x^2 + 1}$.

Comme $x^3 + 3 = o(e^x)$ par croissances comparées, on a $x^3 - e^x + 3 \underset{+\infty}{\sim} -e^x$. Ainsi,

$$\frac{x^3 - e^x + 3}{x^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^x}{x^2}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - e^x + 3}{x^2 + 1} = -\infty.$$

c. Équivalents usuels

Comme pour les suites, ces équivalents usuels sont à connaître par cœur. Ils sont presque tous basés sur le fait que si une fonction f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Proposition - Équivalents usuels au voisinage de 0

Au voisinage de 0,

$$\begin{array}{llll} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, & \sin(x) \underset{0}{\sim} x, & \tan(x) \underset{0}{\sim} x, & \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x. \\ e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, & \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, & \arctan(x) \underset{0}{\sim} x, & \end{array}$$

Exemples.

1. Étude de la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.

$$\text{On a } \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

2. Recherche d'un équivalent de $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.

$$\text{Comme } \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ on a } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

3. Étude de la limite en $+\infty$ de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

D'après le point précédent, on a $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1$, donc $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Par composition, on en déduit que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e$.

4. Étude de la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \quad \text{car } \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{donc } f(x) \sim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}.$$

On en déduit que la limite existe, et vaut $\frac{1}{2}$.

5. Déterminons la limite en 0^+ de $\frac{x^{2x} - 1}{x^2}$. Comme $x^{2x} = e^{2x \ln x}$ et $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées, on a

$$\frac{x^{2x} - 1}{x^2} = \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{2x \ln x}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty, \quad \text{donc } \frac{x^{2x} - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$