Chapitre 21

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E, F et G désignent des espaces vectoriels réels.

I Généralités

1. Définition

Définition - Application linéaire

- ⋆ Une application $\varphi : E \to F$ est dite *linéaire* si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda u + \mu v) \ = \ \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v).$$

Autrement dit, l'image par φ d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

- ⋆ *Cas $E = F$.* Si $\varphi : E \to E$ est linéaire, on dit que φ est un *endomorphisme* de E. On note généralement $\mathscr{L}(E)$ plutôt que $\mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- ⋆ *Cas $F = \mathbb{R}$.* Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est linéaire, on dit que φ est une *forme linéaire* de E.

Remarque. Pour montrer qu'une application $\varphi : E \to F$ est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $u, v \in E$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\lambda u + v) \ = \ \lambda\varphi(u) + \varphi(v).$$

On peut aussi montrer que pour tous $u, v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(u + v) \ = \ \varphi(u) + \varphi(v), \qquad \text{et} \qquad \varphi(\lambda u) \ = \ \lambda\varphi(v).$$

Application nulle, Identité.

1. L'*application nulle* de E dans F, qui à tout vecteur x de E associe le vecteur 0_F de F est linéaire. On la note $0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
2. L'application $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x$ appelée *application identité* de E est linéaire.

Exemples.

1. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ est linéaire : si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ appartiennent à $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   - ⋄ $\varphi(u + v) \ = \ x + x' + y + y' = \varphi(x, y) + \varphi(x', y') \ = \ \varphi(u) + \varphi(v)$,
   - ⋄ $\varphi(\lambda u) \ = \ \lambda x + \lambda y \ = \ \lambda(x + y) \ = \ \lambda\varphi(u)$.
2. L'application $\varphi : P(x) \mapsto P(0)$ est linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ fixé. L'application $\psi : P(x) \mapsto A(x)P(x)$ est linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.
4. L'application $\Phi : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est linéaire de $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
5. $\Psi : f \mapsto f'$ est une application linéaire de $\mathscr{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ dans lui-même car la dérivée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées. On dit que la dérivation est liénaire.

Remarque. Les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont exactement les applications de la forme $\varphi : x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.

En effet, si $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = \varphi(x \times 1) = x\,\varphi(1)$. En posant $a = \varphi(1)$, on a donc bien montré que φ est de la forme ci-dessus.

Réciproquement, si $\varphi : x \mapsto ax$, alors φ est bien une application linéaire, ce qui conclut.

Proposition - Propriétés des applications linéaires

Si $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\varphi(0_E) = 0_F$, et pour tous $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ et pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k).$$

Démonstration. D'après la définition de la linéarité, on a $\varphi(0_E) = \varphi(2 \cdot 0_E) = 2\,\varphi(0_E)$, donc $\varphi(0_E) = 0_F$. On voit le deuxième point par une récurrence directe, laissée en exercice. $\square$

Exercice 1.

1. Si $\varphi : (x,y,z) \mapsto 3x + 5y - 3z + 1$, a-t-on $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?
2. Si $\varphi : (x,y,z) \mapsto 3x + 5y - 3z$, a-t-on $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$?
3. Si $\varphi : (x,y) \mapsto x + xy + y$, a-t-on $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?

Application linéaire associée à une matrice. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

est une application linéaire, dite canoniquement associée à la matrice A. On la notera φ_A dans la suite.

Démonstration. Si $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda \varphi_A(X) + \varphi_A(Y)$. $\square$

Exemple. L'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \end{pmatrix}$ est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$.

Démonstration. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on a $\varphi_A \circ \varphi_B(X) = \varphi_A(\varphi_B(X)) = \varphi_A(BX) = ABX = \varphi_{AB}(X)$. $\square$

2. Opérations sur les applications linéaires

a. Opérations dans $\mathscr{L}(E,F)$

Combinaison linéaire. Si φ et ψ sont des applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $\star$ $\varphi + \psi \in \mathscr{L}(E,F)$,
- $\star$ $\lambda\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$.

En d'autres termes, comme de plus $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ est linéaire, $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

Exemples.

1. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ P(x) & \mapsto & P(x) + 2P(1) \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ P(x) & \mapsto & 2P(x^2) + 3P'(0) \end{array}$ est combinaison linéaire d'endomorphismes de $\mathbb{R}[x]$, donc $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[x])$.

Composition. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F,G)$, alors, $\psi \circ \varphi \in \mathscr{L}(E,G)$.

Exemple. Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ P(x) & \mapsto & x\,P'(x) \end{array}$, alors $f = \psi \circ \varphi$, où $\varphi : P(x) \mapsto P'(x)$ et $\psi : P(x) \mapsto xP(x)$, donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[x])$.

b. Opérations dans $\mathscr{L}(E)$

Puissances d'un endomorphisme. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \text{et} \quad \varphi^0 = \mathrm{Id}_E\,.$$

On dit que l'endomorphisme φ^n est la puissance n-ème de l'endomorphisme φ. On prendra bien garde à cette notation et à ce terme : il s'agit bien de composition de fonctions et pas de produit.

Exemple. Nous avons vu que $\varphi : P \mapsto P'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. Sa puissance n-ème n'est autre que l'application dérivée n-ème : $\varphi^n : P \mapsto P^{(n)}$.

Remarque. Si $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, on a $\ker\varphi \subset \ker\varphi^2$, et $\mathrm{Im}\,\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\,\varphi$. En effet :

- si $u \in \ker\varphi$, alors $\varphi(u) = 0_E$, donc $\varphi^2(u) = \varphi(\varphi(u)) = \varphi(0_E) = 0_E$, et $u \in \ker\varphi^2$, on a donc $\ker\varphi \subset \ker\varphi^2$,
- si $v \in \mathrm{Im}\,\varphi^2$, alors il existe $u \in E$ tel que $v = \varphi^2(u) = \varphi(\varphi(u)) \in \mathrm{Im}\,\varphi$, on a donc $\mathrm{Im}\,\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\,\varphi$.

Proposition - Formule du binôme de Newton

Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si φ et ψ commutent, c'est-à-dire si $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, alors

$$(\varphi + \psi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k \circ \psi^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{n-k} \circ \psi^k.$$

Exercice 2. Soit $\Phi : (x,y) \mapsto (2x+y,\, 2y)$. Déterminer Φ^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. On pose $\varphi : (x,y) \mapsto 2\,(x,y)$ (c'est-à-dire que $\varphi = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$), et $\psi : (x,y) \mapsto (y,0)$. On a ainsi $\Phi = \varphi + \psi$.

On note que $\varphi^k = 2^k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout entier k. Par ailleurs, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\psi^2(x,y) = \varphi(y,0) = (0,0)$, ce qui entraîne que ψ^k est l'application nulle dès que $k \geqslant 2$.

Comme $\varphi = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ commute avec ψ, la formule du binôme donne pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Psi^n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{n-k} \circ \psi^k(x,y) &= \binom{n}{0} \varphi^n \circ \psi^0(x,y) + \binom{n}{1} \varphi^{n-1} \circ \psi(x,y) \\ &= 2^n\,(x,y) + n\,2^{n-1}(y,0) = (2^n x + n\,2^{n-1} y,\, 2^n y).\end{aligned}$$

3. Noyau et image d'une application linéaire

Dans toute la suite, on note φ une application linéaire de E dans F.

Définition - Noyau et image

⋆ Le *noyau* de φ, noté $\mathrm{Ker}\,\varphi$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image par φ est 0_F. Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{u \in E,\ \varphi(u) = 0_F\}\,.$$

⋆ L'*image* de φ, notée $\mathrm{Im}\,\varphi$, est l'ensemble des images des éléments de E par φ. Autrement dit,

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(u),\ u \in E\} = \{v \in F,\ \exists u \in E,\ \varphi(u) = v\}.$$

Exemples. 1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par $\varphi : (x,y,z) \mapsto (-x+3y,\ 2x-2y-2z,\ -x-y+2z)$

- On a $(x,y,z) \in \ker\varphi$ ssi $\varphi(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ceci équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{l} -x+3y=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+3y=0 \\ 4y-2z=0 \\ -4y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+3y=0 \\ 2y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\frac{z}{2} \\ y=\frac{z}{2} \end{array}\right.$$

  Ainsi, $\ker\varphi = \left\{(3\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z),\ z\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\,((3,1,2))$.
- Par ailleurs, $\mathrm{Im}\,\varphi = \{(-x+3y,\ 2x-2y-2z,\ -x-y+2z)\,,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$, donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\,\varphi &=& \{x\,(-1,2,-1)+y\,(3,-2,-1)+z\,(0,-2,2),\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &=& \mathrm{Vect}\,((-1,2,-1),\ (3,-2,-1),\ (0,-2,2)) \\ &=& \mathrm{Vect}\,((-1,2,-1),\ (0,4,-4),\ (0,-2,2)) \ = \ \mathrm{Vect}\,((-1,2,-1),\ (0,4,-4))\,. \end{array}$$

2. Soit l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_1[x] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

- On a $P \in \ker\varphi$ ssi $\psi(P) = 0_{\mathbb{R}[x]}$, c'est-à-dire ssi $P' = 0$. Par conséquent, $\ker\varphi$ est l'ensemble des polynômes constants. On a donc $\ker\varphi = \mathbb{R}_0[x] = \mathrm{Vect}\,(1)$.
- Nous allons montrer que $\mathrm{Im}\,\psi = \mathbb{R}_1[x]$. On considère un polynôme $Q(x) = ax+b \in \mathbb{R}_1[x]$. En posant $P(x) = a\frac{x^2}{2} + bx$, on constate que $Q = P' = \psi(P)$. Ainsi, $Q \in \mathrm{Im}\,\psi$. Ceci entraîne que $\mathbb{R}_1[x] \subset \mathrm{Im}\,\psi$. Comme on a aussi $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathbb{R}_1[x]$, ceci conclut.

On remarque dans les exemples ci-dessus que $\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}\,\varphi$ un sous-espace vectoriel de F. Nous allons voir que c'est toujours le cas.

Proposition

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

- Comme $\varphi(0_E) = 0_F$, on a $0_E \in \ker\varphi$. Par ailleurs, pour tous $u,v \in \ker\varphi$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on a $\varphi(\lambda u+\mu v) = \lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v) = 0_F$. On a donc montré que $\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Comme $0_F = \varphi(0_E)$, on a $0_F \in \ker\varphi$. Par ailleurs, si $v_1,v_2 \in \mathrm{Im}\,\varphi$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $u_1,u_2\in E$ tels que $v_1 = \varphi(u_1)$ et $v_2 = \varphi(u_2)$. Par conséquent, $\lambda v_1+\mu v_2 = \lambda\varphi(u_1)+\mu\varphi(u_2) = \varphi(\lambda u_1+\mu u_2) \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Ainsi, $\mathrm{Im}\,\varphi$ est bien un sous-espace vectoriel de F. □

Exercice 3.

1. Soit l'application $\varphi : P \mapsto P(0)$, linéaire de $\mathbb{R}_4[x]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$.
2. Justifier que $\psi : M \mapsto M - {}^tM$ définit une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\psi$ et $\mathrm{Im}\,\psi$.

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on rappelle que le noyau de A est définie par $\ker A = \{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Ainsi, on a

$$\ker\varphi_A = \{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \varphi_A(X) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} = \ker A.$$

Rappel.

⋆ φ est *injective* si

$$\boxed{\forall u,v\in E,\quad \varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow u=v,}$$

autrement dit chaque élément de l'ensemble d'arrivée a *au plus un* antécédent par φ.

⋆ φ est *surjective* si

$$\boxed{\forall v\in F,\quad \exists u\in E,\quad \varphi(u)=v,}$$

autrement dit chaque élément de l'ensemble d'arrivée a *au moins un* antécédent par φ.

Théorème - Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité d'une application linéaire

Soit φ une application linéaire de E dans F.

i. φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0_E\}$.

ii. φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = F$.

Démonstration. 1. Supposons que φ est injective. Comme on sait que $\varphi(0_E) = 0_F$, l'injectivité implique que 0_E est le seul antécédent de 0_F par φ, c'est-à-dire que $\ker\varphi = \{0_E\}$.

Supposons que $\ker\varphi = \{0_E\}$. Si u et v sont des éléments de E tel que $\varphi(u) = \varphi(v)$, alors par linéarité on a $\varphi(u - v) = 0_F$, c'est-à-dire $u - v \in \ker\varphi$. Ainsi, on a $u - v = 0_E$, donc $u = v$. On a bien montré que φ est injective.

2. Cette propriété ne dépend pas de la linéarité, et est vraie pour n'importe quelle application : φ est surjective ssi tout élément de F admet au moins un antécédent dans E, c'est-à-dire appartient à $\operatorname{Im}\varphi$. Ceci s'écrit $F \subset \operatorname{Im}\varphi$. Comme l'autre inclusion $\operatorname{Im}\varphi \subset F$ est toujours vraie, on a le résultat. □

⚠ Le critère pour l'injectivité n'est vrai que pour des applications linéaires !

Remarque. Pour montrer qu'une application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ est injective, il suffit de montrer que $\ker\varphi \subset \{0_E\}$, car l'autre inclusion $\{0_E\} \subset \ker\varphi$ est toujours vraie.

4. Isomorphismes

Définition - Isomorphisme, espaces isomorphes

- ⋆ On appelle *isomorphisme de E dans F* toute application linéaire et bijective de E dans F. S'il existe un isomorphisme entre E et F, on dit que E et F sont isomorphes.
- ⋆ Un isomorphisme de E dans lui-même est appelé un *automorphisme de E*.

Exemples.

1. $\varphi : (x, y) \mapsto (x + y,\, x - y)$ est un automophisme de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi^{-1} : (a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$.
2. $\psi : (a, b, c) \mapsto ax^2 + bx + c$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[x]$.
3. $\Psi : (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. $\Phi : M \mapsto {}^tM$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition - Linéarité de la réciproque

Si φ est un isomorphisme de E dans F, alors l'application réciproque φ^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
En particulier, l'application réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

Démonstration. Nous savons déjà que φ^{-1} est une bijection de F dans E, il reste donc à montrer que φ^{-1} est une application linéaire. Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\lambda u + v) = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(\varphi^{-1}(u)) + \varphi(\varphi^{-1}(v))\big) &= \varphi^{-1}\Big(\varphi\Big(\lambda\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)\Big)\Big) \\ &= \lambda\varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v),\end{aligned}$$

ce qui montre bien que φ^{-1} est linéaire. □

En combinant le résultat ci-dessus et les propriétés déjà rencontrées sur les compositions de bijections, on obtient le résultat suivant.

Proposition - Composition d'automorphismes

La composée de deux automorphismes φ et ψ de E est un automorphisme de E et on a : $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

II Applications linéaires en dimension finie

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie, F est un espace vectoriel quelconque et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Rôle de la dimension finie

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors

$$\operatorname{Im} \varphi \;=\; \operatorname{Vect}\left(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)\right).$$

En particulier, $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F.

Démonstration. Par définition, $\operatorname{Im} \varphi \;=\; \{\varphi(u),\ u \in E\}$. Comme tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$, ceci se récrit :

$$\operatorname{Im} \varphi \;=\; \left\{\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right),\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi\left(e_i\right),\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\} \;=\; \operatorname{Vect}\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\right). \qquad \square$$

Exemple. Si $\psi : P \mapsto P'$, nous avons vu que $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_1[x])$. Nous allons retrouver $\operatorname{Im} \psi$: comme $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$,

$$\operatorname{Im} \psi \;=\; \operatorname{Vect}\left(\psi(1), \psi(x), \psi(x^2)\right) \;=\; \operatorname{Vect}\left(0, 1, 2x\right) \;=\; \operatorname{Vect}\left(1, x\right).$$

Remarque. Dans le cas où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, une application linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$, en effet :

$$\text{si } u \in E, \text{ alors } u \text{ s'écrit } u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \text{ donc } \varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i).$$

Par conséquent, deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur une base de E sont identiques.

Exercice 4. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(1, 0) = (2, 3)$ et $\varphi(0, 1) = (1, 2)$. Déterminer $\varphi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et donner une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

Solution. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(x, y) \;=\; \varphi(x(1, 0) + y(0, 1)) \;=\; x\, \varphi(1, 0) + y\, \varphi(0, 1) \;=\; (2x, 3x) + (y, 2y) \;=\; (2x + y,\, 3x + 2y).$$

Par ailleurs, $\operatorname{Im} \varphi \;=\; \operatorname{Vect}\left((2, 3), (1, 2)\right)$, donc la famille libre $((2, 3), (1, 2))$ est une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

Théorème

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

i. φ est surjective ssi $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une famille génératrice de F.

ii. φ est injective ssi $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une famille libre.

iii. φ est donc un isomorphisme de E dans F ssi $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base de F.

Démonstration. *i.* On a $\operatorname{Im} \varphi \;=\; \operatorname{Vect}\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\right)$, donc φ est surjective ssi $\operatorname{Vect}\left(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\right) \;=\; F$, c'est-à-dire $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ engendre F.

ii. Si $\ker \varphi = \{0_E\}$, montrons que $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est libre :

$$\text{si } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = 0_E, \text{ alors } \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_E, \text{ donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E, \text{ et } \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \text{ car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est libre.}$$

Supposons maintenant $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ libre, et montrons que $\ker \varphi = \{0_E\}$. Si $\varphi(u) = 0_E$, alors

$$u \text{ s'écrit } u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \text{ et comme } \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_E, \text{ on a } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = 0_E \text{ donc } \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0, \text{ et } u = 0_E.$$

iii. On obtient ce point en combinant les deux précédents. $\square$

Remarque. On retiendra tout particulièrement le troisième point, qui énonce qu'en dimension finie, une application linéaire est un isomorphisme ssi elle envoie une base sur une base.

Exemple. On retrouve que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ en remarquant que si (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = ((1, 1), (1, -1))$. Comme $((1, 1), (1, -1))$ est une famille libre de cardinal 2, c'est une base de $\mathbb{R}^2$, ce qui conclut.

Corollaire

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. S'il existe un isomorphisme φ de E dans F, on sait que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F, donc $\dim F = n = \dim E$.

Si $\dim E = \dim F$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de F, alors l'application linéaire φ telle que $\varphi(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est un isomorphisme, d'après le théorème ci-dessus. □

2. Rang d'une application linéaire

Définition - Rang d'une application linéaire

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle *rang* de φ l'entier $\operatorname{rg}\varphi = \dim(\operatorname{Im}\varphi)$. En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors

$$\operatorname{rg}\varphi \;=\; \dim\big(\operatorname{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))\big) \;=\; \operatorname{rg}\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big).$$

Méthode - Déterminer le rang d'une application linéaire

Pour déterminer le rang de $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, on peut :

- choisir une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E,
- déterminer le rang de la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$, par exemple à l'aide du pivot de Gauss.

Exemples.

1. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z,\ y + z,\ 3x + y + 4z)$. On a $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. Déterminons le rang de f. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \;=\; \operatorname{Vect}((1,0,3),(1,1,1),(2,1,4)) &= \operatorname{Vect}((1,0,3),(0,1,-2),(0,1,-2))\\ &= \operatorname{Vect}((1,0,3),(0,1,-2)),\end{aligned}$$

donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = 2$ car la famille $((1, 0, 3), (0, 1, -2))$ est libre.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto & xP'(x) \end{array}$. Déterminons le rang de f. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}\big(f(x^n), f(x^{n-1}), \dots, f(x^2), f(x), f(1)\big) &= \operatorname{Vect}\big(nx^n,\ (n-1)x^{n-1}, \dots, 2x^2, x, 0\big)\\ &= \operatorname{Vect}\big(nx^n,\ (n-1)x^{n-1}, \dots, 2x^2, x\big).\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(x^n), f(x^{n-1}), \dots, f(x^2), f(x), f(1)\big) = n$ car la famille ci-dessus est échelonnée en degré, donc libre.

3. Théorème du rang

Le théorème suivant est un des théorèmes les plus importants d'algèbre linéaire.

Théorème - Théorème du rang

Si E est de dimension finie, F espace vectoriel quelconque et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

$$\dim E \;=\; \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi \;=\; \dim \ker \varphi + \operatorname{rg} \varphi.$$

Démonstration. On sait que $\ker \varphi$ est un sous-espace vectoriel de E, on peut donc en considérer une base $(e_1, \ldots, e_k)$. On sait par ailleurs qu'on peut compléter cette famille en une base $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E. On a alors

$$\operatorname{rg} \varphi \;=\; \operatorname{rg}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)) \;=\; \operatorname{rg}(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$$

car $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_k) = 0_E$.

Nous allons vérifier que la famille $(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$ est libre. Comme elle comporte $n-k$ vecteurs, on aura alors $\operatorname{rg} \varphi = n-k$, ce qui assurera que $\dim \ker \varphi + \operatorname{rg} \varphi = k + (n-k) = n = \dim E$.

Si $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = 0_E$, alors $\varphi\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_E$, donc $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \ker \varphi$. Ainsi, $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Ceci impose que $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, donc $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est libre. $\square$

Remarques.

- On ne suppose rien sur l'espace d'arrivée.
- Attention : $\dim(E) = \dim(\ker \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$ ne veut pas dire $\operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = E$.
  Si E n'est pas un endomorphisme, cette égalité n'a d'ailleurs pas de sens, car $\operatorname{Im} \varphi$ est un sev de F, pas de E. Dans le cas où φ est un endomorphisme, ce n'est pas toujours vrai non plus : par exemple, $\varphi : (x, y) \mapsto (y, 0)$ est une application linéaire telle que $\ker \varphi = \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Vect}(1, 0)$.

Méthode - Calcul du rang d'une application linéaire

Pour déterminer le rang d'une application linéaire, on peut aussi déterminer la dimension du noyau et utiliser le théorème du rang.

Exercice 5. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Déterminer le rang de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto & P'' \end{array}$.

Corollaire

Si $\dim E = \dim F$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$, alors

$$\varphi \text{ est surjective } \Leftrightarrow \varphi \text{ est injective } \Leftrightarrow \varphi \text{ est bijective.}$$

Le résultat est en particulier vrai si φ est un endomorphisme ($E = F$).

Démonstration. Il suffit de montrer : φ est injective $\Leftrightarrow$ φ est surjective, *i.e.* $\ker \varphi = \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = F$. On a :

$$\ker \varphi = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim F \Leftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = F. \quad \square$$

Remarques.

- ⚠ L'hypothèse $\dim E = \dim F$ est primordiale : le résultat devient faux sinon.
- Le plus simple est souvent de montrer qu'une application linéaire φ est injective en étudiant son noyau. Si les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, alors φ est bijective.

Exercice 6. Montrer que $\varphi : P \mapsto P(x+1) + P(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, où $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème du rang permet de montrer directement les caractérisations suivantes, que l'on peut voir par ailleurs comme une conséquence du théorème p. 6.

Proposition - Injectivité, surjectivité, bijectivité avec le rang

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie. On a :

i. φ est injective si et seulement si $\operatorname{rg}\varphi = \dim E$.

ii. φ est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}\varphi = \dim F$.

iii. φ est bijective si et seulement si $\operatorname{rg}\varphi = \dim E = \dim F$.

4. Formes linéaires et hyperplans

Rappel. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, on appelle hyperplan tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Proposition - Formes linéaires et hyperplans

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.}$$

Exemples.

1. Comme $\varphi : (x,y,z) \mapsto 3x+2y-z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$, le sev $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 3x+2y-z=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
2. Comme $\psi : P \mapsto P(2)$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$, le sev $\{P\in\mathbb{R}_n[x],\ P(2)=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[x]$.

III Projecteurs

Dans cette partie, nous allons généraliser la notion de projection, bien connue dans $\mathbb{R}^2$. À titre d'exemple, on rappelle que si $\vec{u}$ est un vecteur du plan de coordonnées (x,y), le projeté de $\vec{u}$ sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées est le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $(x,0)$.
Cette projection peut être représentée par l'application suivante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$p \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,0) \end{array}$$

On dit que p est le projecteur sur $F = \operatorname{Vect}((1,0))$, parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((0,1))$.
On sait que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$, c'est-à-dire que tout élément $u=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = u_F + u_G$, où $u_F \in F$ et $u_G \in G$, on a d'ailleurs $u_F = (x,0)$ et $u_G = (0,y)$. L'application p se récrit alors $p : u \mapsto u_F$.

Nous allons généraliser ceci au cas où on dispose de F et G, sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E. On parlera toujours de la projection sur F, parallèlement à G.

Dans toute cette partie, si F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = F\oplus G$) et $u\in E$, on notera toujours

$$u = u_F + u_G$$

l'unique décomposition de u vérifiant $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

Définition - Projecteurs

Si $E = F \oplus G$, on appelle $\star\ p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F \end{array}$ le *projecteur sur F parallèlement à G*,

$\star\ q : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_G \end{array}$ le *projecteur sur G parallèlement à F*.

On dit que p et q sont les projecteurs associés aux sous-espaces supplémentaires F et G.

Remarques.

- Si $u \in F$, alors $u_F = u$, et $p(u) = u$. Par ailleurs, si $u \in G$, alors $u_F = 0_E$, et $p(u) = 0_E$.
- Pour tout $u \in E$, on a $p(u) \in F$, donc $p \circ p(u) = p(p(u)) = p(u)$. En d'autres termes, $p \circ p = p$.

Proposition - Linéarité des projecteurs

Si p est un projecteur de E, alors p est un endomorphisme de E.

Démonstration. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + v_F + v_G = \lambda u_F + v_F + \lambda u_G + v_G$. Comme $\lambda u_F + v_F \in F$, et $\lambda u_G + v_G \in G$,

$$p(\lambda u + v) = \lambda u_F + v_F = \lambda p(u) + p(v).$$

Ainsi, p est linéaire, et c'est donc un endomorphisme de E. □

Exemples.

1. Si $F = \text{Vect}\,((1,0))$ parallèlement à $G = \text{Vect}\,((1,1))$, on sait que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. Déterminons le projecteur p sur F parallèlement à G.

   Il suffit de décomposer tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G : si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $u = (x - y, 0) + (y, y)$, donc

   $$p(x, y) = (x - y, 0).$$

2. Déterminons le projecteur sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   Montrons d'abord que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

   - Si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tM = M$ et ${}^tM = -M$, donc $M = -M$, ce qui donne $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. On a donc bien $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$.
   - Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Comme on a $M + {}^tM \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M - {}^tM \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, ceci donne $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

   D'après la décomposition ci-dessus, on a alors pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

   $$p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM).$$

Proposition

Si $E = F \oplus G$ et p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $\text{Im}\, p = F$ et $\text{Ker}\, p = G$. Autrement dit, si p est un projecteur, c'est le projecteur sur $\text{Im}\, p$, parallèlement à $\ker p$.

Par conséquent, on a $E = \text{Im}\, p \oplus \text{Ker}\, p$.

Démonstration.

- On remarque d'abord que pour tout $u \in E$, $p(u) = u_F \in F$, donc $\text{Im}\, p \subset F$. Par ailleurs, si $u \in F$, alors $u = p(u) \in \text{Im}\, p$, donc $F \subset \text{Im}\, p$. Finalement, on a bien $\text{Im}\, p = F$.
- Montrons maintenant que $\ker p = G$: si $u \in E$ et $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$, alors

  $$u \in \text{Ker}\, p \quad \Leftrightarrow \quad p(u) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad u_F = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad u = u_G \quad \Leftrightarrow \quad u \in G,$$

  ce qui donne bien $\ker p = G$. □

Proposition - Projecteurs associés

Si $E = F \oplus G$ et p et q sont les projecteurs associés aux espaces vectoriels supplémentaires F et G, alors

- ◇ $p + q = \text{Id}_E$ (donc $q = \text{Id}_E - p$),
- ◇ $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur sur G parallèlement à F,

- pour tout $u \in E$, on a $(p+q)(u) = p(u) + q(u) = u_F + u_G = u$, donc $p + q = \mathrm{Id}_E$,
- si $u \in E$, alors $p \circ q(u) = p(q(u)) = 0_E$ car $q(u) \in G$, et $q \circ p(u) = q(p(u)) = 0_E$ car $p(u) \in F$. □

Proposition - Caractérisation des projecteurs

Si $p \in \mathscr{L}(E)$, alors p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration.

- Si p est un projecteur, on a vu ci-dessus que $p \circ p = p$.
- Si $p \circ p = p$, montrons d'abord que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
  - Si $u \in E$, on a clairement $u = p(u) + (u - p(u))$. Comme $p\big(u - p(u)\big) = p(u) - p(p(u)) = 0$, on a $u - p(u) \in \ker p$. Par ailleurs, on a bien sûr $p(u) \in \operatorname{Im} p$. Ainsi, $u \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$, donc $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$.
  - Si $v \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, alors $p(v) = 0_E$, et il existe $u \in E$ tel que $v = p(u)$. On a $p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$, donc $v = 0_E$. Finalement, on a montré que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0_E\}$, donc $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

  Si $u \in E$, d'après la décomposition $u = p(u) + (u - p(u))$ ci-dessus, le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$ est donné par $u \mapsto p(u)$: il s'agit de l'application p. □

Méthode - Montrer qu'une application est un projecteur

Pour montrer que p est un projecteur :

- on vérifie que p est linéaire et que $p \circ p = p$ (en dimension finie, il suffit de vérifier que $p(p(e_i)) = p(e_i)$ pour chaque vecteur e_i d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E),
- on en déduit que p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Exercice 7. Montrer que l'application

$$p : (x, y) \mapsto \left(\tfrac{2}{3}(x+y),\ \tfrac{1}{3}(x+y)\right)$$

est un projecteur de $\mathbb{R}^2$, et préciser les sous-espaces vectoriels supplémentaires associés.

Solution. On remarque que si $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, alors $p(e_1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $p(e_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, donc

$$p(p(e_1)) = p\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad p(p(e_2)) = p\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right).$$

Ainsi, $p \circ p$ et p coïncident sur la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, donc $p \circ p = p$. Par ailleurs :

- $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}((p(e_1), p(e_2)) = \operatorname{Vect}\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) = \operatorname{Vect}((2,1))$.
- $(x, y) \in \ker p$ ssi $x + y = 0$, donc $\ker p = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((1, -1))$.

Finalement, on a montré que p est le projecteur sur $\operatorname{Vect}((2,1))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1,-1))$.