

Chapitre 22

Représentation matricielle des applications linéaires

Rappel. Si E est un espace vectoriel de dimension n , ayant pour base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout vecteur u de E , il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les *coordonnées* de u et on appelle *matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$* la matrice colonne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante exprime qu'on peut travailler avec les matrices des coordonnées au lieu de travailler avec les vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie. Sa démonstration est directe, et laissée en exercice.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$$\begin{array}{ccc} \text{L'application } \text{Mat}_{\mathcal{B}_E} : E & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \end{array} \quad \text{est un isomorphisme.}$$

Exemple. Si $P(x) = x^2 - 2x + 3 \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, base canonique que $\mathbb{R}_2[x]$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I Matrices d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

On désigne par E un espace vectoriel de dimension n , et par $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle matrice dans la base $\mathcal{B}_E$ d'une famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de E la matrice de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ dont la j -ème colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_j)$, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On note cette matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.

Exemples. 1. Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 2, 1)$ et $u_3 = (0, -1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{array}{ccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Si maintenant on considère $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 0, 0)$, qui est une autre base de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{cases} u_1 = e'_1 & = e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3, \\ u_2 = e'_1 + e'_2 & = e'_1 + e'_2 + 0e'_3, \\ u_3 = -e'_2 + e'_3 & = 0e'_1 - e'_2 + e'_3 \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, u_3) = \begin{array}{ccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. Soient $P(x) = 1 + 2x + x^2$ et $Q(x) = 2 + x + x^2$ deux polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\text{— Si } \mathcal{B} = (1, x, x^2), \text{ alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $\mathcal{B}' = (1, 1+x, x+x^2)$, alors $P(x) = (1+x) + (x+x^2)$, $Q(x) = 2 + (x+x^2)$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. La matrice de la famille $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ dans la base $\mathcal{B}_E$ est la matrice I_n .

2. Matrices d'une application linéaire

Dans toute la suite, E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des bases respectives de E et F . On a ainsi $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Définition - Matrice d'une application linéaire

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) = \begin{matrix} & \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_p) \\ \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1))} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_p))}$

Remarques.

- Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on note souvent $\varphi(\mathcal{B}_E) = \varphi(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(\mathcal{B}_E)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)).$$

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: le nombre de lignes correspond à la dimension de l'espace d'arrivée, et le nombre de colonnes à la dimension de l'espace de départ.
- *Cas d'un endomorphisme* : si $E = F$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est carrée. Dans ce cas, on prend en général la même base au départ et à l'arrivée, et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.
- *Cas d'une forme linéaire* : on rappelle qu'il s'agit du cas où l'espace d'arrivée est $F = \mathbb{R}$. La matrice associée à φ appartient alors à $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$: c'est une matrice ligne.



Méthode - Construire la matrice d'une application linéaire

La construction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ se fait colonne par colonne.

- On calcule $\varphi(e_j)$ et on détermine ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$ de F , pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$.
- On crée la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$: la j -ième colonne de la matrice est la matrice des coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Exemples.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ donnée par $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, x - z)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Comme on a

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = (2, 0) = 2\varepsilon_1, \\ \varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = (1, -1) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(\varphi(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(\varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(\varphi(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on change la base d'arrivée en $\mathcal{B}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$, où $\varepsilon'_1 = (1, 1)$ et $\varepsilon'_2 = (-1, 1)$, alors $\varphi(e_1) = (1, 1) = \varepsilon'_1$, $\varphi(e_2) = (2, 0) = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$, et $\varphi(e_3) = (1, -1) = -\varepsilon'_2$, donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)) = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

3. Soient $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ définie par $\psi : P(x) \mapsto xP'(x) + P(1)$, et $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \psi(1) & \psi(x) & \psi(x^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \text{car} \quad \begin{cases} \psi(1) = 1, \\ \psi(x) = x + 1, \\ \psi(x^2) = 2x^2 + 1. \end{cases}$$

4. Soient $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $\Phi : M \mapsto M - 2^t M$, et $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Phi(E_{1,1}) & \Phi(E_{1,2}) & \Phi(E_{2,1}) & \Phi(E_{2,2}) \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \text{car} \quad \begin{cases} \Phi(E_{1,1}) = -E_{1,1}, \\ \Phi(E_{1,2}) = E_{1,1} - 2E_{2,1}, \\ \Phi(E_{2,1}) = -2E_{1,2} + E_{2,1}, \\ \Phi(E_{2,2}) = -E_{2,2}. \end{cases}$$

Remarque. Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors pour toute base $\mathcal{B}$ de E , la matrice de l'application Id_E dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice identité I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Application linéaire associée à une matrice. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on rappelle que l'application linéaire canoniquement associée à A , notée φ_A , est donnée par

$$\begin{matrix} \varphi_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{matrix}$$

On note $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \text{pour } j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ et } i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p}(\varphi_A) = A$. En d'autres termes, A est la matrice de φ_A dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.

On peut voir ce dernier résultat en remarquant que, si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de la matrice A , alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a

$$\varphi_A(e_j) = Ae_j = \left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j \end{bmatrix}, \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p}(\varphi_A) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{array} \right] = A.$$

3. Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur

Exemple. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ donnée par $\varphi : (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, -x + y)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Si $u = (2, -1, 1)$, on a $\varphi(u) = (4, -3)$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{ainsi} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(\varphi(u)).$$

Nous allons voir que ce résultat est général : si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on a toujours $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.

Proposition - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F . Pour tout $u \in E$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

Plus généralement, si $u_1, \dots, u_r \in E$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u_1, \dots, u_r)$.

Exemples.

1. Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ est donnée par $\varphi : P \mapsto P'$, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Si } P(x) = 3 - 2x + x^2, \text{ alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P)) = A \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve bien que $\varphi(P) = -2 + 2x$.

2. Si $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi(x, y)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\psi(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ l'application dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Si } P(x) = x^2 - x + 3, \text{ Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(P)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \varphi(P)(x) = 2x^2 - 4x + 3.$$

Remarque. Si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = A$,

$$\varphi(u) = 0_E \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(u)) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, \quad \text{où } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

Ainsi, chercher le noyau de φ revient à résoudre l'équation $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On obtient alors les matrices coordonnées des éléments de $\ker \varphi$.

Exemple. Revenons sur l'exemple 3 ci-dessus, et déterminons $\ker \Phi$.

On résout le système $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}, \quad \text{donc les solutions sont les matrices } \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que $\ker \Phi = \{ax^2 + ax, a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^2 + x)$.

Théorème

L'application

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E} : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Remarque. La démonstration de ce résultat repose directement sur la définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases, et est laissée en exercice. Elle consiste à montrer :

- ◇ la linéarité : si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda\varphi + \psi) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\psi)$, autrement dit la matrice d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des matrices,
- ◇ la bijectivité : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$.

Corollaire - Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessus : comme il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np = \dim E \dim F$. $\square$

4. Noyau et image d'une matrice

Définition - Noyau et image d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et φ_A son application linéaire canoniquement associée, on appelle :

- *noyau* de A , noté $\ker A$, le noyau de φ_A : $\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$,
- *image* de A , notée $\text{Im } A$, l'image de φ_A : $\text{Im } A = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

Remarques.

- Par le théorème du rang appliqué à l'application linéaire φ_A , on a $\dim \ker A + \dim \text{Im } A = p$.
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a alors $\text{Im } A = \text{Vect}(Ae_1, \dots, Ae_p)$. Comme pour tout j , Ae_j est la j -ième colonne de A , on a

$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p), \text{ où } C_1, \dots, C_p \text{ sont les colonnes de } A.$$

En d'autres termes $\text{Im } A$ est le sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par la famille de ses colonnes.

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$. D'après la proposition du paragraphe précédent, si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v)$, alors

$$\varphi(u) = v \Leftrightarrow AX = Y.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \varphi(u) = 0_E & \Leftrightarrow & AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ v = \varphi(u) & \Leftrightarrow & Y = AX \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u \in \ker \varphi & \Leftrightarrow & X \in \ker A \\ v \in \text{Im } \varphi & \Leftrightarrow & Y \in \text{Im } A. \end{cases}$$

On en déduit la méthode suivante pour déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ à l'aide de $\ker A$ et $\text{Im } A$.



Méthode - Déterminer le noyau et l'image d'une application à partir de sa matrice dans des bases

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$, alors on peut déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ de la manière suivante.

1. – On détermine $\ker A$:
on cherche tous les vecteurs X tels que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ en résolvant un système.
- On détermine $\text{Im } A$:
 $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A .
2. On retrouve $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ en se souvenant que
 - ★ $\ker A$ est l'ensemble des matrices coordonnées des vecteurs de $\ker \varphi$ dans la base $\mathcal{B}_E$,
 - ★ $\text{Im } A$ est l'ensemble des matrices coordonnées des vecteurs de $\text{Im } \varphi$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Remarque. Il découle de ce qui précède que si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$, alors

- φ est injective si et seulement si $\ker A = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$,
- φ est surjective si et seulement si $\text{Im } A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple. Déterminons $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$, où $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$.

$$P \mapsto 2P(x) - (x+1)P'(x)$$

On a $\varphi(1) = 2$, $\varphi(x) = 2x - (x+1) = x-1$, et $\varphi(x^2) = 2x^2 - (x+1)2x = -2x$. La matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est donc

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- Déterminons $\ker A$: on cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tels que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \end{cases},$$

donc $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Or on sait que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x^2 + 2x + 1)$. Alors,

$$\ker \varphi = \text{Vect}(x^2 + 2x + 1).$$

- Déterminons $\text{Im } A$: on a

$$\text{Im } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(1)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, on a $\text{Im } \varphi = \text{Vect}(1, x)$.

5. Composition d'applications linéaires

Proposition - Matrice d'une composée

Si E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi).$$

Remarque. Dans le parallèle entre les applications linéaires et les matrices fourni par l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la proposition ci-dessus indique que la composition de deux applications linéaires correspond au produit matriciel des matrices de ces applications dans les bonnes bases.

⚠ En général, même si φ, ψ sont des endomorphismes, et si A, B sont des matrices carrées, $\psi \circ \varphi \neq \varphi \circ \psi$, et $AB \neq BA$. Attention à respecter l'ordre quand on passe des composées d'applications linéaires aux produits de matrices.

Corollaire - Matrice d'une puissance d'un endomorphisme

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi))^n.$$

⚠ Le résultat n'est vrai que si la base est la même au départ et à l'arrivée.

Exemple. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(p)$, alors p est un projecteur si et seulement si $A^2 = A$. En effet,

$$p^2 = p \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(p^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(p) \Leftrightarrow (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(p))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(p) \Leftrightarrow A^2 = A.$$

Théorème - Bijectivité et matrice d'une réciproque

Si $\dim E = \dim F$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors φ est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible.

Dans ce cas, la matrice de la réciproque de φ est donnée par $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi))^{-1}$.

Démonstration. – Si φ est un isomorphisme, alors φ admet une réciproque $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, on a donc $\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_E$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E) = I$, où I est la matrice identité. D'après ce qui précède on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = I.$$

Nous savons que ceci implique que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible, d'inverse $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi^{-1})$.

– Réciproquement, supposons que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible, et notons B son inverse. On considère maintenant $\psi \in \mathcal{L}(F, E)$ qui a pour matrice B dans les bases $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E$, c'est-à-dire $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\psi) = B$. On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\psi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = B \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = I.$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\psi \circ \varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)$, donc $\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$. Ceci suffit pour conclure que φ est un isomorphisme, de réciproque $\varphi^{-1} = \psi$. On a donc bien $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\varphi^{-1}) = B = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi))^{-1}$. $\square$

Corollaire - Cas d'un endomorphisme

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors φ est un automorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\varphi)$ est inversible.



Méthode - Bijectivité d'une application linéaire

Pour montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on peut

- choisir des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de E et F , et calculer la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)$,
- montrer que A est inversible.

Pour trouver la bijection réciproque, on peut calculer A^{-1} , et en déduire φ^{-1} .

Exemples.

1. Soient $f : (x, y, z, t) \mapsto (2x + y + 2z + t, y - t, 3z + t, 2t)$. Montrons que f est un automorphisme.

$$\text{Si } \mathcal{B} \text{ désigne la base canonique de } \mathbb{R}^4, \text{ on a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible, ce qui entraîne que f est un automorphisme.

2. Soit $g : (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. Déterminons à quelle condition g est un automorphisme et déterminons dans ce cas la bijection réciproque.

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, qui est inversible ssi $ad - bc \neq 0$.

Ainsi, g est un automorphisme ssi $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g^{-1}) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, donc

$$g^{-1} : (x, y) \mapsto \frac{1}{ad-bc}(dx - by, -cx + ay).$$

Exercice 1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2[x])$ défini par $\varphi : P \mapsto P(x+2)$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. L'endomorphisme φ est-il bijectif? Si oui, déterminer sa bijection réciproque et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

II Rang d'une matrice

1. Définition

Rappel. Si E est un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de E , on appelle rang de la famille de vecteurs

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *rang* de A , noté $\text{rg}(A)$, le rang de la famille formée par ses vecteurs colonnes :

$$\text{si } A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{array} \right), \text{ alors } \text{rg } A = \text{rg}(u_1, \dots, u_p).$$

Autrement dit $\text{rg } A = \dim \text{Im } A = \text{rg } \varphi_A$, où φ_A est l'application linéaire canoniquement associée à A .

Remarque. Le rang d'une matrice étant le rang d'une famille de vecteurs, ce que l'on sait sur le rang reste bien sûr vrai ici. En particulier, comme $\text{rg } A$ est le rang d'une famille de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n , on a

$$\begin{cases} \text{rg } A \leq p \\ \text{rg } A \leq n \end{cases}, \text{ soit } \text{rg } A \leq \min(p, n).$$

En d'autres termes, le rang d'une matrice ne peut excéder le nombre de ses lignes, ni le nombre de ses colonnes.

Proposition - Rang d'une transposée (admis)

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$.



Rang d'une matrice.

En python, la commande `al.matrix_rank(A)`, issue de la librairie `numpy.linalg`, importée avec l'alias `al` renvoie le rang d'une matrice A .

Exemples.

$$1. \text{rg}(I_n) = n, \text{ et } \text{rg}(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0.$$

$$2. \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 1, \text{ car } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires.}$$

$$3. \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

$$\text{On peut aussi écrire } \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg}((1, 2, 3), (1, 4, 5)) = \text{rg}((1, 2, 3), (0, 2, 2)) = 2.$$

Remarque. Une matrice échelonnée (en ligne) est une matrice où chaque ligne commence avec un nombre de 0 strictement supérieur à celui de la ligne précédente si cette ligne est non nulle. En d'autres termes, une matrice est échelonnée en ligne ssi ses vecteurs lignes forment une famille échelonnée. On sait donc dans ce cas que le rang de la matrice correspond au nombre de lignes non nulles.

$$\text{Exemple. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée, mais } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ ne l'est pas.}$$

2. Calcul du rang

Comme le rang d'une matrice est défini comme le rang d'une famille de vecteurs, les techniques de calcul que nous connaissons pour le calcul de rang d'une famille de vecteur s'appliquent bien sûr pour le calcul du rang des matrices. En particulier, la technique du pivot de Gauss s'applique directement.

Proposition - Opérations sur les lignes prélevant le rang

Les opérations suivantes sur les lignes ne changent pas le rang :

- i. l'échange de ligne $L_i \leftrightarrow L_j$,
- ii. la multiplication d'une ligne par une constante non nulle $L_i \leftarrow \alpha L_i$, avec $\alpha \neq 0$,
- iii. l'addition d'une ligne à une autre $L_i \leftarrow L_i + L_j$, avec $i \neq j$.

Remarques.

- Il s'agit des opérations du pivot de Gauss.
- En combinant ii et iii, on obtient que $L_i \leftarrow \alpha L_i + \lambda L_j$, avec $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$ ne change pas le rang.

Exemples. Déterminer le rang des matrices suivantes

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, on a $\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -11 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$.
2. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\text{rg } B = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$.

Remarque. Comme la transposition échange les lignes et les colonnes, pour calculer le rang, on peut faire les mêmes opérations sur les colonnes.

3. Application au calcul de rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Le paragraphe précédent fournit un moyen de calculer le rang d'une famille de vecteur : le rang de la famille de vecteur est celui de sa matrice dans une base donnée de E .

Proposition - Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soient $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de vecteurs de E et $\mathcal{B}$ est une base de E . On a

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_k)).$$

**Méthode - Calcul du rang d'une famille de vecteurs**

Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, on peut donc calculer le rang de la matrice des coordonnées de cette famille dans une base.

Exemples.

1. Déterminons le rang de (P_1, P_2, P_3) , où $P_1(x) = 6x^2 + 5x + 1$, $P_2(x) = 3x^2 + x + 2$ et $P_3(x) = 7x^2 + 4x + 3$.

Si $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \text{rg}(P_1, P_2, P_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

d'après l'exemple précédent.

2. Déterminons le rang de la famille $((1, 1, 0), (3, 2, -1), (2, 1, 1))$.

$$\text{On a } \text{rg}((1, 1, 0), (3, 2, -1), (2, 1, 1)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \text{d'après l'exemple ci-dessus.}$$

Proposition - Lien avec le rang d'une application linéaire

Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi)).$$

Démonstration. Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, on a

$$\operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) = \operatorname{rg} (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)))$$

d'après la proposition précédente. Comme $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\varphi) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$, on a bien le résultat. $\square$

**Méthode - Calcul du rang d'une application linéaire**

Pour calculer le rang d'une application linéaire φ , on peut choisir des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectivement de E et F , puis calculer le rang de la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

4. Inversibilité et rang**Proposition - Inversibilité et rang**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$.

Démonstration. On sait que A est inversible si et seulement si son application linéaire canoniquement associée φ_A est un isomorphisme, ce qui équivaut à $\operatorname{rg} \varphi_A = n$. Comme $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \varphi_A$, on a bien montré le résultat. $\square$

**Méthode - Inversibilité, rang, calcul de l'inverse**

- Pour déterminer si une matrice carrée est inversible, il suffit de calculer son rang.
- Pour montrer qu'une matrice est inversible *et déterminer son inverse*, on a recours à la résolution d'un système linéaire.

III Polynôme d'endomorphisme, polynôme matriciel**1. Définition****Définition - Polynôme d'endomorphisme, polynôme matriciel**

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]$.

- On note $P(\varphi)$ l'endomorphisme de E donné par $P(\varphi) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \dots + a_d\varphi^d$.
- On note $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_d A^d$.

On parle alors respectivement de polynôme d'endomorphisme, et de polynôme matriciel.

Exemple. Soit le polynôme $P(x) = 3x^2 - x - 2$.

- Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors $P(\varphi) = 3\varphi \circ \varphi - \varphi - 2 \operatorname{Id}_E$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $P(A) = 3A^2 - A - 2I_n$.

Proposition

Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[x]$. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E ,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi)) = P(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)).$$

Démonstration. Si P s'écrit $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, alors par linéarité de l'application linéaire $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(\varphi)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{k=0}^d a_k \varphi^k\right) = \sum_{k=0}^d a_k \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k) = \sum_{k=0}^d a_k \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^k = P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)). \quad \square$$

2. Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition - Polynôme annulateur

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On dit qu'un polynôme P est un *polynôme annulateur*

- de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ si $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$,
- de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exemple. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, qui a pour matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E , alors $p^2 = p$ donc $p^2 - p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de p , et également un polynôme annulateur de A .

Remarque. Plus généralement, si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors P est un polynôme annulateur de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si P est un polynôme annulateur de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Exercice 2. Soit $\varphi : (x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$ et calculer A^3 . En déduire un polynôme annulateur de φ .

$$\text{On a } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

On en déduit que $P(x) = x^3 - 1$ est un polynôme annulateur de f et A .

Utilisation pour déterminer l'inverse, la bijection réciproque

La donnée d'un polynôme annulateur permet parfois de montrer qu'une matrice est inversible et de déterminer son inverse, ou qu'un endomorphisme est bijectif et de déterminer sa bijection réciproque.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$ est un polynôme annulateur de A , c'est-à-dire $A^3 + 4A^2 - 2A - 3I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi,

$$A^3 + 4A^2 - 2A = 3I_n, \text{ donc } A(A^2 + 4A - 2I_n) = 3I_n, \text{ et } A \times \underbrace{\frac{1}{3}(A^2 + 4A - 2I_n)}_{=A^{-1}} = I_n.$$

On a donc montré que A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 + 4A - 2I_n)$.

De même, si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ a pour polynôme annulateur P , on obtient $\varphi \circ (\frac{1}{3}(\varphi^2 + 4\varphi - 2\text{Id}_E)) = \text{Id}_E$, donc on a montré que $\varphi^{-1} = \frac{1}{3}(\varphi^2 + 4\varphi - 2\text{Id}_E)$.



Méthode - Montrer qu'une matrice est inversible à l'aide d'un polynôme annulateur

Si on connaît un polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme dont le terme constant n'est pas nul, on peut obtenir l'inversibilité et l'inverse de A de la manière suivante :

1. on isole I_n dans l'égalité,
2. on factorise pas A dans l'autre membre.

La démarche analogue pour les endomorphismes permet de montrer qu'un endomorphisme est bijectif, et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P(x) = x^2 - x - 2$ est un polynôme annulateur de A .
2. Montrer que A est inversible, et déterminer son inverse.

IV Changement de base

On se place dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie, et on considère deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E .

Comme on l'a vu, selon la base que l'on choisit d'utiliser sur un espace vectoriel de dimension finie E , les coordonnées d'un vecteur $u \in E$ ne sont pas les mêmes.

Exemple. Si $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$, $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, 1))$, alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E , et si on considère $u = (2, 2) \in E$, alors

$$X_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons voir comment obtenir directement $X_{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, à partir de $X_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ au moyen d'un produit matriciel avec une matrice qui dépend de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, appelée matrice de passage.

Définition - Matrice de passage

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & \dots & e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Proposition - Changement de base

Si $u \in E$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration. Comme $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$, on sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{Id}_E(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Ceci se réécrit $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. $\square$

Exemple. Revenons à l'exemple ci-dessus : $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1, 1)$, $e'_2 = (0, 1)$. Ainsi,

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \text{car} \quad \begin{cases} e_1 = e'_1 - e'_2 \\ e_2 = e'_2 \end{cases}.$$

Par conséquent, $X_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on retrouve le résultat attendu.

Proposition - Inverse des matrices de passage

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , alors $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est inversible, et

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ est la matrice de l'isomorphisme Id_E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, elle est donc inversible. Par ailleurs ; comme $\text{Id}_E^{-1} = \text{Id}_E$,

$$(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E). \quad \square$$