Chapitre 23

Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Dans tout ce chapitre, on désigne par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I Couples de variables aléatoires et lois

1. Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes

On commence par rappeler la définition suivante.

Définition - Variables aléatoires réelles discrètes indépendantes

Deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si pour tout $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$, les événements $[X = i]$ et $[Y = j]$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) \;=\; \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j).$$

Remarque. Intuitivement, cela signifie que la valeur de chaque variable aléatoire, quelle qu'elle soit, n'influence pas la valeur prise par l'autre.

Exemples.

1. On lance un dé bleu et un dé blanc, équilibrés à 6 faces. On appelle X (resp. Y) le numéro obtenu avec le dé bleu (resp. blanc). Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux avec remise. Soient X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro tiré. Les variables X et Y sont indépendantes.
3. Si on reprend l'exemple précédent avec un tirage sans remise, les variables X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on a par exemple $\mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) = 0$, mais $\mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) \neq 0$.

Théorème - Lemme des coalitions (admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et f, g sont deux fonctions réelles, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

2. Couple de variables aléatoires

Dans la suite, on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un même espace probabilisé. On appellera couple de variables aléatoires la donnée de (X, Y).

Définition - Loi de couple

On appelle *loi jointe de* (X, Y) ou *loi du couple* (X, Y) la donnée de :

$$\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) \quad \text{pour tous } i \in X(\Omega) \text{ et } j \in Y(\Omega).$$

Exemples.

1. On lance un dé blanc et un dé bleu, équilibrés à 6 faces, et on note X la variable aléatoire correspondant au résultat du dé blanc et Y celle correspondant au résultat du dé bleu. On a :
   - ⋆ $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$,
   - ⋆ pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, $\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{36}$ par indépendance.
2. On reprend l'exemple précédent, et on note cette fois X la variable aléatoire correspondant au plus petit des deux résultats obtenus, et Y celle correspondant au plus grand. On a :
   - ⋆ $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ comme ci-dessus,

- ⋆ pour tout $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, si on note D_1 la variable aléatoire donnant le résultat du dé blanc, et D_2 celle donnant le résultat du dé bleu, alors

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i>j, \\ \mathbb{P}([D_1=i]\cap[D_2=i]) & \text{si } i=j, \\ \mathbb{P}([D_1=i]\cap[D_2=j])+\mathbb{P}([D_1=j]\cap[D_2=i]) & \text{si } i<j. \end{cases}$$

Comme D_1 et D_2 sont des variables aléatoires indépendantes, on a ainsi

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } i>j, \\ \frac{1}{36} & \text{si } i=j, \\ \frac{1}{18} & \text{si } i<j. \end{cases}$$

Lorsque l'on connait la loi du couple (X,Y), il est possible d'en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales.

Méthode - Déterminer les lois de X et Y à partir de la loi de couple

Si (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes, la formule des probabilités totales permet de retrouver les lois de X et Y à partir de la loi de couple :

- pour tout $i \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=i) \;=\; \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$,
- pour tout $j \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y=j) \;=\; \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$.

3. Lois conditionnelles

Définition - Lois conditionnelles

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes.

- ⋆ Soit $i \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=i)\neq 0$. La *loi conditionnelle de Y sachant* $[X=i]$ est la donnée, pour tout j de $Y(\Omega)$, des probabilités $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=j)$.
- ⋆ Soit $j \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=j)\neq 0$. La *loi conditionnelle de X sachant* $[Y=j]$ est la donnée, pour tout i de $X(\Omega)$, des probabilités $\mathbb{P}_{[Y=i]}(X=i)$.

Remarque. Si l'on connaît la loi de X et pour tout $i \in X(\Omega)$ la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$, alors on obtient la loi du couple : pour tout $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) \;=\; \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=j).$$

De manière analogue, on peut trouver la loi de couple à partir de la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant $[Y=j]$ pour tout $j \in Y(\Omega$.

Méthode - Déterminer la loi de X ou de Y à partir d'une loi conditionnelle

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes. Si l'on connaît la loi de X et pour tout $i\in X(\Omega)$ les lois conditionnelles de Y sachant $[X=i]$, alors on obtient la loi de Y : pour tout $j \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y=j) \;=\; \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i)\,P_{[X=i]}(Y=j).$$

Dé manière analogue, on peut trouver la loi de X à partir de la loi de Y et des lois conditionnelles de X sachant $[Y=j]$ pour tout $j\in Y(\Omega)$.

Exercice 1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale à la valeur obtenue sur le dé. Si on a obtenu $i \in [\![1,6]\!]$, on lance i fois une pièce équilibrée et on note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de Pile obtenus. Déterminer la loi du couple (X,Y).

Solution. On a $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$, et $Y(\Omega) = [\![0,6]\!]$. Par ailleurs, si $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, alors

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \;=\; \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}_{[X=i]}(Y=j) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{6}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{i-j} = \frac{1}{6}\frac{1}{2^i}\binom{i}{j} & \text{si } j \leqslant i,\\ 0 & \text{si } j > i.\end{cases}$$

Exercice 2. Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ et $p \in]0,1[$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $[X=k]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(k,p)$. Déterminer la loi de Y.

Solution. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. On sait que si $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i) = \begin{cases} \binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} & \text{si } i \leqslant k,\\ 0 & \text{si } i > k.\end{cases}$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(Y=i) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i)\,\mathbb{P}(X=k)$.

Comme on a vu que $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i) = 0$ si $k < i$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=i) \;=\; \sum_{k=i}^{+\infty}\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=i)\,\mathbb{P}(X=k) \quad &= \quad \sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \quad \sum_{k=i}^{+\infty}\frac{1}{i!(k-i)!}\,p^i(1-p)^{k-i}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k\\
&= \quad \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^i}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{(1-p)^{k-i}\lambda^k}{(k-i)!}\\
&\underset{l=k-i}{=} \quad \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^i}{i!}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(1-p)^l\lambda^{l+i}}{l!}\\
&= \quad \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\underbrace{\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda}(1-p)} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une loi de Poisson. Finalement, on a donc $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.

Remarques.

– Dans la plupart des cas, les couples considérés sont obtenus après deux épreuves successives : c'est alors la connaissance, à l'aide de l'étude de l'énoncé, de la loi de la première épreuve et des lois conditionnelles de la deuxième épreuve sachant la première qui permettent d'obtenir la loi du couple.

  On utilisera parfois avec profit une représentation en arbre au brouillon pour modéliser ce type de situation et on rédigera ensuite proprement.

– Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, loi marginale et loi conditionnelle. Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales.

II Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes

Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes et g est une fonction réelle, alors $g(X,Y)$ est encore une variable aléatoire discrète. Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de la loi de $g(X,Y)$ dans certains cas.

Exemple. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors $X+Y$, XY, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$ sont des variables aléatoires discrètes.

1. Somme

Méthode - Loi d'une somme de variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, on s'intéresse à $Z = X+Y$. On a alors :

$$Z(\Omega) \;=\; \{i+j,\; i \in X(\Omega),\; j \in Y(\Omega)\}.$$

On obtient la loi de $Z = X + Y$ en appliquant la formule des probabilités totales. En utilisant le système complet d'événements $\big([X = i]\big)_{i\in X(\Omega)}$, on obtient, pour tout $k \in Z(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\big(Z = k\big) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Z = k]\big) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = k - i]\big).$$

On peut bien sûr aussi utiliser le système complet d'événements $\big([Y = j]\big)_{j\in Y(\Omega)}$: pour tout $k \in Z(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\big(Z = k\big) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([Y = j] \cap [Z = k]\big) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([Y = j] \cap [X = k - j]\big).$$

Remarque. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = k - i]\big) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = k - i)$ pour tous k, i, donc on peut récrire la somme pour la calculer.
Si elles ne sont pas indépendantes, on a besoin de la loi du couple pour terminer le calcul.

Proposition - Stabilité par somme de la loi de Poisson

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2)$, où $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Démonstration. Tout d'abord, on a $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$. Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\big([X = i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_2 = k - i]\big) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{{\lambda_1}^i}{i!}\, \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{{\lambda_2}^{k-i}}{(k-i)!}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(i-k)!} {\lambda_1}^i {\lambda_2}^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} {\lambda_1}^i {\lambda_2}^{k-i} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$$

Ceci entraîne que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. □

Proposition - Stabilité par somme de la loi binomiale

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$, où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

On note que sommer X_1 et X_2 revient à effectuer $n_1 + n_2$ épreuves de Bernoulli indépendantes, et à compter le nombre de succès : on ajoute le nombre de succès sur les n_1 premiers tirages et le nombre de succès sur les n_2 suivants.

Remarque. Ainsi, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

2. Maximum et minimum

On peut trouver la loi de $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ à partir des lois de X et Y grâce à la remarque suivante :

- $\max(X, Y) \leqslant k$ si et seulement si $X \leqslant k$ et $Y \leqslant k$.
- $\min(X, Y) > k$ si et seulement si $X > k$ et $Y > k$.

Méthode - Loi du max, loi du min

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs *entières*.

- Pour déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$, on passe par sa fonction de répartition.
  1. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, on détermine $\mathbb{P}(Z \leqslant k) = \mathbb{P}\big([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]\big)$.
  2. On trouve ensuite $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leqslant k) - \mathbb{P}(Z \leqslant k - 1)$, car $[Z \leqslant k] = [Z = k] \sqcup [Z \leqslant k - 1]$.

– Pour déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$, on passe par sa fonction dite d'anti-répartition.

1. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, on détermine $\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}\big([X > k] \cap [Y > k]\big)$.
2. On trouve ensuite $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z > k-1) - \mathbb{P}(Z > k)$, car $[Z > k-1] = [Z = k] \sqcup [Z > k]$.

Exercice 3. On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et Y la variable aléatoire égale au numéro de la seconde. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

Solution. On a $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$. On commence par calculer $\mathbb{P}(Z \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Par indépendance de X et Y, on a

$$\mathbb{P}(Z \leqslant k) \;=\; \mathbb{P}\big([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]\big) \;=\; \mathbb{P}(X \leqslant k)\,\mathbb{P}(Y \leqslant k) \;=\; \frac{k}{n}\,\frac{k}{n} \;=\; \frac{k^2}{n^2}.$$

La formule reste vraie pour $k = 0$. On a alors $\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \mathbb{P}(Z \leqslant k) - \mathbb{P}(Z \leqslant k-1) \;=\; \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \;=\; \frac{2k-1}{n^2}$.

On peut par ailleurs vérifier qu'on a bien $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z = k) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} \;=\; \frac{1}{n^2}\left(2\sum\limits_{k=1}^{n} k - \sum\limits_{k=1}^{n} 1\right) \;=\; \frac{1}{n^2}(n(n+1)-n) \;=\; 1.$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X > k)$.
2. En déduire la loi de Z.

Solution.

1. Si $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X > k) \;=\; \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \;=\; \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} \underset{j=i-1}{=} p \sum\limits_{j=k}^{+\infty} (1-p)^j \;=\; p\,\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)} \;=\; (1-p)^k.$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) = \mathbb{P}(X > k)\,\mathbb{P}(Y > k)$ par indépendance. On déduit alors de la question précédente que $\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^{2k}$.
   Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) \;=\; \mathbb{P}(Z > k-1) - \mathbb{P}(Z > k) \;=\; (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} \;&=\; (1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2)\\ &=\; \big((1-p)^2\big)^{k-1} p\,(2-p).\end{aligned}$$
   Ainsi, Z suit la loi $\mathscr{G}(p(2-p))$.

3. Espérance

Rappel : *Théorème de transfert.* Si X est une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle, alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum g(k)\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument. Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)\mathbb{P}(X = k).$$

Convergence absolue pour les séries doubles. On dit qu'une série double $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j}$ converge absolument si

– pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} |u_{i,j}|$ converge,

– la série $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} |u_{i,j}|$ converge.

C'est équivalent à vérifier ces deux points en inversant l'ordre des sommations. Par ailleurs, dans ce cas,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \;=\; \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j}.$$

Théorème - Formule de transfert pour un couple de variable aléatoires discrètes (admis)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors la variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \in X(\Omega)} \sum\limits_{j \in Y(\Omega)} g(i, j)\,\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big)$ converge absolument.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} g(i,j)\,P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\\ &= \sum_{j\in Y(\Omega)}\sum_{i\in X(\Omega)} g(i,j)\,P\big([X=i]\cap[Y=j]\big).\end{aligned}$$

Remarque. Dans le cas où les variables aléatoires X et Y sont finies, la variable aléatoire $g(X,Y)$ est finie également, et $\mathbb{E}(g(X,Y))$ admet toujours une espérance.

Exemple. Déterminer $\mathbb{E}(XY)$, où (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes telles que pour tout $(i,j)\in[\![1,2]\!]^2$,

$$\mathbb{P}\big[(X=i)\cap(Y=j)\big] = \begin{cases} \frac{i}{4} \text{ si } i=j,\\ \frac{1}{4} \text{ si } i<j,\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Solution. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} ij\,\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\\ &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) + 2\,\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) + 4\,\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2])\\ &= \tfrac{1}{4}+2\,\tfrac{1}{4}+4\,\tfrac{2}{4} = \tfrac{11}{4}.\end{aligned}$$

Proposition - Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Soient deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y *indépendantes* et admettant chacune une espérance. Alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Remarque. Attention, la réciproque est fausse. On peut avoir $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, mais X et Y ne sont pas indépendantes. À titre d'exemple, on considère le couple de variables aléatoires (X,Y) où

- $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$, et $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{3}$,
- $Y=\mathbb{1}_{[X=0]}$, c'est-à-dire que $Y=\begin{cases}0 & \text{si } X\neq 0,\\ 1 & \text{si } X=0.\end{cases}$

Alors $\mathbb{E}(X)=0$, et $\mathbb{E}(XY)=0$ car $\mathbb{P}(XY=0)=1$, donc $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)=0$. Toutefois, X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])=0$ mais $\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\neq 0$.

Démonstration. On utilise le théorème de transfert : on a

$$\begin{aligned}\sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} |ij|\,\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) &= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} |ij|\,\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)\\ &= \sum_{i\in X(\Omega)} |i|\,\mathbb{P}(X=i)\sum_{j\in\Omega}|j|\,\mathbb{P}(Y=j)\\ &= \mathbb{E}(|X|)\,\mathbb{E}(|Y|).\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{i\in X(\Omega)}\sum\limits_{j\in Y(\Omega)} ij\,\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$ converge absolument, donc XY admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i\in X(\Omega)} i\,\mathbb{P}(X=i)\sum_{j\in Y(\Omega)} j\,\mathbb{P}(Y=j) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y). \quad \square$$