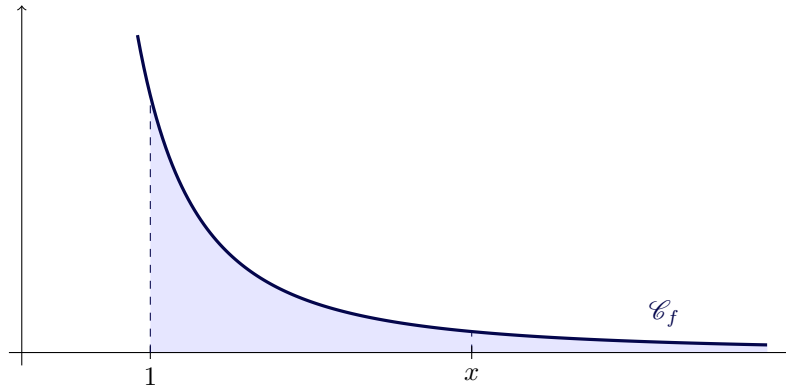


Intégration sur un intervalle quelconque

Pour l'instant, les seules intégrales que nous avons considérées sont des intégrales de fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle fermé borné. Il arrive pourtant que l'aire sous la courbe d'une fonction définie sur un intervalle non fermé ou non bornée soit finie, comme on peut le constater dans l'exemple suivant.



Si on note $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$, on peut alors calculer l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[1, x]$, où $x > 1$. On obtient

$$\int_0^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

On remarque alors que $\int_0^x \frac{1}{t^2} dt$ tend vers 1 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ceci suggère que le domaine bleu clair sur le graphique ci-dessus, qui est non borné, est en fait d'aire finie.

Il semble alors naturel de donner un sens à l'intégrale de f entre 1 et $+\infty$, et de lui donner la valeur 1. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

I Généralités

On cherche à définir l'intégrale d'une fonction réelle f continue sur un intervalle I d'extrémités a et b , qui peut être ouvert, fermé, semi-ouvert, avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $I = [a, b]$, on parlera d'intégrale *impropre* en b .
- Si $I =]a, b]$, on parlera d'intégrale *impropre* en a .
- Si $I =]a, b[$, on parlera d'intégrale *impropre* en a et b .

Exercice 1. Préciser si les intégrales suivantes sont impropres, et en quel point le cas échéant.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.
2. $\int_0^1 \ln(1-x) dx$.
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.
4. $\int_0^{\pi} \frac{x}{\sin x} dx$.

Avant toute étude, il sera important d'identifier la (ou les) borne(s) impropre(s) de l'intégrale considérée.

1. Intégrales convergentes

a. Intégrales une fois impropre

On s'autorisera toujours à écrire $\int_a^b f(t) dt$ dans les cas mentionnés ci-dessus, avec la réserve nécessaire : il se peut que cette intégrale ait un sens (on dira qu'elle est convergente, et on pourra alors calculer sa valeur), ou qu'elle n'en ait pas (on dira qu'elle est divergente).

Définition - Intégrale convergente, intégrale divergente

- Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est *convergente* si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b . On pose alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est *divergente*.

- De manière analogue, si f est continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, l'intégrale est convergente si $\int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a , et on pose alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt.$$

Etudier la nature (ou l'existence) d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou non. Il y a deux étapes : un calcul d'intégrale sur un segment, puis un passage à la limite.

Remarque. Si F est une primitive de f sur $[a, b[$, alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ pour tout $x \in [a, b[$. Ainsi, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge ssi F a une limite finie en b . Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - F(a).$$

Exemple. Étude de la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$.

- La fonction $\ln$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$, l'intégrale est impropre en 0.
- Soit $x \in]0, 1]$. On a $\int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = -1 - (x \ln x - x)$. Ainsi, $\int_x^1 \ln t dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$.

On en déduit que l'intégrale est convergente, et $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes, et les calculer le cas échéant.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt. \quad 2. \int_0^1 \frac{1}{1-t} dt. \quad 3. \int_1^{+\infty} e^{-2t} dt. \quad 4. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

b. Intégrales doublement impropre**Définition - Convergence d'une intégrale doublement impropre**

Soit f une fonction continue sur $]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est impropre en a et b , on dira qu'elle est doublement impropre.

On dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$, chacune une fois impropre, convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Sinon, c'est-à-dire si au moins l'une des deux diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

Remarque. La définition ne dépend pas du réel c choisi. Dans la pratique, on pourra donc choisir n'importe quel élément de $]a, b[$.

Exemple. Nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t(t-1)} dt$.

L'intégrale est doublement impropre, et converge si et seulement si les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$, respectivement impropres en 0 et en 1, convergent toutes deux.

– Pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $\int_x^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = [\ln|t-1| - \ln|t|]_x^{\frac{1}{2}} = \ln(1-x) - \ln(x)$.

Ainsi, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{\frac{1}{2}} f(t) dt = -\infty$, et $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$ diverge.

On en déduit donc directement que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t(t-1)} dt$ diverge.

2. Intégrale faussement impropre

Dans le cas où la fonction qu'on cherche à intégrer n'est pas continue (voire pas définie) en un point extrémité de l'intervalle d'intégration, mais prolongeable par continuité en ce point, tout se passe comme si la fonction était continue en ce point. C'est ce qu'exprime le résultat suivant.

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, et prolongeable par continuité en b . On note $\tilde{f}$ ce prolongement. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge et } \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt.$$

On dit dans ce cas que l'intégrale est *faussement impropre*.

Remarque. La borne b est alors nécessairement un nombre réel.

Exemple. Étude de la nature de l'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$.

La fonction $t \mapsto t \ln t$ est continue sur $]0, 1]$, et prolongeable par continuité en 0, car $t \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$.

Ainsi, l'intégrale est convergente.

Exercice 3. Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$.

II Intégrales de référence

1. Fonctions exponentielles

Proposition - Intégrales de fonctions exponentielles

Soit λ un réel fixé,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \text{ converge si et seulement si } \lambda > 0.$$

$$\text{En cas de convergence, } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration. L'intégrale considérée est impropre en $+\infty$.

– Cas $\lambda = 0$: on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x 1 dt = x$, donc $\int_0^x 1 dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, et l'intégrale diverge.

– Si $\lambda \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \text{ donc } \int_0^x e^{-\lambda t} dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, l'intégrale impropre converge si et seulement si $\lambda > 0$. □

2. Intégrales de Riemann

Soient a, b deux réels strictement positifs et α un réel.

- ★ On appelle intégrale de Riemann impropre en 0 et de paramètre α tout intégrale de la forme $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$.
- ★ On appelle intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ et de paramètre α tout intégrale de la forme $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Proposition - Intégrales de Riemann impropres en $+\infty$ et en 0

Soit α un réel.

- i. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- ii. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. Le premier résultat se généralise aux intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, où $a > 0$, qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition - Intégrales de Riemann impropres en un point

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ convergent ssi $\alpha < 1$.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$.

3. Intégrale de Gauss

Proposition - Intégrale de Gauss (admis)

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

III Propriétés et calcul des intégrales impropres

1. Propriétés

Nous allons voir que les propriétés de l'intégrale se généralisent aux intégrales impropres.

Dans les résultats qui suivent, on énonce souvent les propriétés seulement dans le cas d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ impropre en b , pour plus de simplicité. Ces résultats s'énoncent toutefois de manière analogue pour une intégrale impropre en a .

Proposition - Linéarité

Si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt \text{ converge, et } \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Remarque.

- L'ensemble E des fonctions f telles que $\int_a^b f(t) dt$ converge est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.
- L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, qu'on appelle donc *forme linéaire* sur E .

⚠ Pour écrire $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$, il faut s'assurer de la convergence des deux intégrales de droite, et pas seulement celle de l'intégrale de gauche.

Exemple. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{3}{t^2} - 2e^{-2t} \right) dt$.

Proposition - Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Alors pour tout $c \in [a, b[$,

$$\int_c^b f(t) dt \text{ converge, et } \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Remarque. Seul le comportement de f au voisinage de b importe donc pour déterminer la convergence de l'intégrale.

Proposition - Positivité et croissance

- i. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- ii. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que pour tous $t \in [a, b[$, $f(t) \leq g(t)$. Si les deux intégrales impropres $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Théorème - Positivité stricte

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$ telle que $\int_a^b f(t) dt$ converge.

- i. S'il existe $x \in [a, b[$ tel que $f(x) > 0$, alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.
- ii. Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b[$: pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) = 0$.

2. Calcul d'une intégrale impropre

Intégration par parties

Nous avons vu que l'étude de la convergence d'une intégrale impropre se ramène à l'étude d'une ou deux intégrales sur un segment. Il est alors bien sûr possible d'effectuer une intégration par parties dans ces intégrales sur des segments. On retiendra qu'on ne fait *jamaïs* d'intégration par parties directement dans une intégrale impropre.



Méthode - Intégrer par parties dans une intégrale impropre

- On se ramène à une (ou deux) intégrale(s) définie(s) sur un segment.
- On mène une intégration par parties dans l'intégrale sur un segment.
- On passe ensuite à la limite.

Exemple. On sait que l'intégrale $\int_0^1 t \ln t dt$ est faussement impropre. Nous allons calculer sa valeur par intégration par parties. Soit $x \in]0, 1]$, les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $\ln$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x, 1]$, donc on peut intégrer par parties sur $[x, 1]$:

$$\int_x^1 t \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt = -\frac{x^2 \ln x}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_x^1 = -\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4}.$$

Ainsi, on retrouve bien que l'intégrale converge, et sa valeur est $-\frac{1}{4}$.

Exercice 4. Calculer, si l'intégrale converge, $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

Changement de variable

Théorème - Changement de variable

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ et φ une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ (avec a, b, α, β réels ou infinis).

Les intégrales $\int_a^b f(u) du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Remarques.

- Si φ est décroissante, en cas de convergence, on a $\int_a^b f(u) du = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$.
- Les changements de variables non affines seront indiqués.

**Méthode - Effectuer un changement de variable dans une intégrale**

1. On explicite le changement de variable : on pose $u = \varphi(t)$, en précisant (et montrant si besoin) que

$$\varphi : \underbrace{]\alpha, \beta[}_{\text{intervalle pour } t} \rightarrow \underbrace{]a, b[}_{\text{intervalle pour } u}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$.

2. Les écritures qui suivent sont des *notations* seulement, qui permettent de pouvoir facilement utiliser la formule du changement de variable.

	Variable u		Variable t	
	$u = \varphi(t)$		$t = \psi(u)$	seulement si nécessaire
Bloc différentiel :	$du = \varphi'(t) dt$		$dt = \psi'(u) du$	et si ψ est $\mathcal{C}^1$
Bornes :	$u \rightarrow a$	$\longleftrightarrow$	$t \rightarrow \alpha$	
	$u \rightarrow b$	$\longleftrightarrow$	$t \rightarrow \beta$	

Ici, $\psi = \varphi^{-1}$ désigne la bijection réciproque de φ . Dans le cas où ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ (qui correspond au cas où φ' ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$), on peut écrire le changement de variable dans l'autre sens si besoin. Si possible, on pourra essayer de faire apparaître $\varphi'(t) dt$ dans l'intégrale pour pouvoir effectuer directement le changement de variable.

3. On remplace une intégrale par une autre, en effectuant tous les remplacements en même temps.
4. On utilise ensuite le théorème de changement de variable : la nouvelle intégrale est de même nature que la précédente, et leurs valeurs sont égales en cas de convergence.

Exemple. Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$ converge et calculons sa valeur.

- On note $\varphi : t \mapsto e^t$, et on pose $u = \varphi(t)$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $[1, +\infty[$.
- Étude des bornes : $t \rightarrow 0 \leftrightarrow u \rightarrow 1$
 $t \rightarrow +\infty \leftrightarrow u \rightarrow +\infty$
- Bloc différentiel : $du = e^t dt$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2t} + 1} e^t dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du$.

$$\text{Si } x \in [1, +\infty[, \text{ on a } \int_1^x \frac{1}{1 + u^2} du = [\arctan u]_1^x = \arctan x - \arctan 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$ est convergente, et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = \frac{\pi}{4}$.

3. Cas des fonctions paires et impaires

Théorème - Cas des fonctions paires et impaires

Soit f une fonction continue sur $] -b, b[$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telle que $\int_0^b f(t) dt$ converge. Alors

- si f est paire, alors $\int_{-b}^b f(t) dt$ converge, et $\int_{-b}^b f(t) dt = 2 \int_0^b f(t) dt$,
- si f est impaire, alors $\int_{-b}^b f(t) dt$ converge et $\int_{-b}^b f(t) dt = 0$.

Démonstration. Nous allons faire le changement de variable affine $u = -t$ dans l'intégrale $\int_{-b}^0 f(t) dt$. On obtient

$$\int_{-b}^0 f(t) dt = - \int_b^0 f(-u) du = \int_0^b f(-u) du.$$

Ainsi, – si f est paire, $\int_{-b}^0 f(t) dt = \int_0^b f(u) du$, donc l'intégrale converge, et par Chasles $\int_{-b}^b f(t) dt = 2 \int_0^b f(t) dt$,
 – si f est impaire, $\int_{-b}^0 f(t) dt = - \int_0^b f(u) du$, donc l'intégrale converge, et par Chasles $\int_{-b}^b f(t) dt = 0$. $\square$

Exemple. Étude et calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-|t|}$ est paire sur $\mathbb{R}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut 1.

On en déduit sur l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt = 2$.

Exemples. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$.

Remarque. Il faut prendre garde à ne pas traiter les deux bornes en même temps.

Par exemple, $\int_{-x}^x t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-x}^x = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, mais l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ diverge.

IV Critères de convergence pour des intégrales de fonctions positives

1. Convergence et intégrale partielle

Proposition

Soit f une fonction continue et *positive* sur $[a, b[$. Alors la fonction $g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ définie sur $[a, b[$, est croissante. Elle admet donc une limite en b si et seulement si elle est majorée, d'où

$$\int_a^b f(t) dt \text{ converge} \quad \text{ssi} \quad g : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est majorée sur } [a, b[.$$

Remarques.

- La propriété existe aussi pour une intégrale impropre en a : la fonction $g : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est décroissante et admet alors une limite en a si et seulement si elle est minorée.
- Il y a ici une analogie évidente avec les séries, qui va se poursuivre dans les paragraphes suivants.

2. Critères de comparaison

Théorème - Critère de comparaison par inégalité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que, pour tout x dans un voisinage de b , $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- i. Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- ii. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Exemples. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t + 1} dt.$

2. $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

3. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} - 2} dt.$

Théorème - Critère d'équivalence

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que g soit positive au voisinage de b .

Si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^2 + 7}{4t^3 + 1} dt.$

Théorème - Critère de comparaison par négligeabilité

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ telles que g soit positive au voisinage de b , et $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$, alors

- i. si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge,
- ii. si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t) + 2}{t^3 + 1} dt.$

Remarques.

- Ces résultats s'adaptent à des intégrales impropres en a . Ils s'adaptent également à des fonctions négatives.
- La comparaison (inégalité, négligeabilité ou équivalence) doit se faire au(x) point(s) où l'intégrale est impropre seulement.
- Les critères de comparaison ne permettent que de déterminer la nature d'une intégrale, pas d'en calculer sa valeur.