Chapitre 25

Convergence de suites de variables aléatoires et approximation

Dans tout le chapitre, les variables aléatoires considérées sont discrètes, et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

I Inégalités probabilistes

Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Inégalité de Markov

Remarque. Nous avons vu que la fonction de répartition de X, définie par $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$ est croissante, et tend vers 1 lorsque $t \to +\infty$. Les mêmes arguments montrent que

$$\mathbb{P}(X < a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) = 1 - \mathbb{P}(X < a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'inégalité de Markov ci-dessous précise la remarque ci-dessus, en donnant une majoration de $\mathbb{P}(X \geqslant a)$. On dit qu'il donne une majoration de la vitesse de convergence de $\mathbb{P}(X \geqslant a)$ vers 0 lorsque $a \to +\infty$.

Théorème - Inégalité de Markov

Si X est à valeurs positives (*i.e.* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admet une espérance, alors pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ k\geqslant a}} \mathbb{P}(X = k)$. Or

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathbb{P}(X = k) = \underbrace{\sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ k<a}} k\,\mathbb{P}(X = k)}_{\geqslant 0} + \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ k\geqslant a}} \underbrace{k}_{\geqslant a}\,\mathbb{P}(X = k).$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X) \geqslant \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ k\geqslant a}} a\,\mathbb{P}(X = k) = a \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ k\geqslant a}} \mathbb{P}(X = k) = a\,\mathbb{P}(X \geqslant a)$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. □

Voici une autre preuve, qui utilise les indicatrices. On rappelle que si A est un événement de $\mathscr{A}$, alors $\mathbb{1}_A$ est une v.a.r. qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

On pose $Y = a\mathbb{1}_{[X\geqslant a]}$. On a alors $Y \leqslant X$. En effet : – soit $[X \geqslant a]$ est réalisé, et alors $Y = a \leqslant X$,
– soit $[X < a]$ est réalisé, et dans ce cas $Y = 0 \leqslant X$.
Ainsi, par croissance de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y) = a\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X\geqslant a]}) = a\,\mathbb{P}(X \geqslant a)$.

Remarques.

- Il convient de noter que la majoration de l'inégalité de Markov se base seulement sur la valeur de l'espérance de X. C'est de fait souvent une majoration très grossière de $\mathbb{P}(X \geqslant a)$.
- Lorsque X est une variable aléatoire quelconque, pas forcément positive, et que $a \in \mathbb{R}$, on ne peut pas appliquer cette inégalité. On peut toutefois s'y ramener parfois en utilisant par exemple la fonction exponentielle : si $\mathbb{E}(e^X)$ existe, alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(e^X \geqslant e^a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^X)}{e^a},$$

car e^X est une variable aléatoire positive et $e^a > 0$ donc l'inégalité de Markov s'applique. Il faudra vérifier au préalable que $\mathbb{E}(e^X)$ existe, par exemple à l'aide du théorème de transfert.

– Si X a la forme spécifique $|Y - \mathbb{E}(Y)|$, on appliquera directement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ci-dessous.

Exemple. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant \lambda^2) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

En effet, X est à valeurs positives et admet une espérance, donc par Markov $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$.

2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

L'inégalité ci-dessus n'est autre qu'un cas particulier de l'inégalité de Markov. Elle vient quantifier une propriété assez intuitive, concernant la variable aléatoire $|X - \mathbb{E}(X)|$, qui doit être vue comme *l'écart à la moyenne* de X :

– plus ε est grand, plus la probabilité $\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big)$ est petite,

– cette probabilité est d'autant plus petite que la variance est petite.

Nous avons vu en effet que la variance d'une variable aléatoire quantifie sa dispersion, c'est-à-dire son étalement autour de son espérance $\mathbb{E}(X)$.

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. On commence par remarquer que si $\varepsilon > 0$, alors

$$[|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon] = [(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2], \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big).$$

Il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, ce qui est possible car c'est une variable aléatoire positive dont l'espérance existe : $\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{V}(X)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big((X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X)^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}. \quad \square$$

Dans la pratique, on se sert de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer la probabilité qu'une variable aléatoire X ait un écart à son espérance supérieur à une valeur donnée, comme dans l'exemple ci-dessous. On remarque qu'il suffit de connaître l'espérance et la variance de X pour trouver une telle majoration.

Remarque. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne dépend de la loi de X que par son espérance et sa variance. Ceci permet d'utiliser les inégalités qui précèdent sans avoir d'autres informations sur la loi de X. En contrepartie, le majorant de $\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big)$ qu'elle fournit est souvent grossier, comme dans le cas de l'inégalité de Markov. Nous verrons plus tard que le théorème central limite permet de donner de bien meilleurs résultats en pratique.

Exemples.

1. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{P}\big(|X - \lambda| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

   On sait que X admet un moment d'ordre 2, et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$. Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

   $$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda\big) = \mathbb{P}\big(|X - \lambda| \geqslant \lambda\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

2. Si la moyenne d'un examen est égale à 10 et l'écart-type de de 4, on peut modéliser la situation à l'aide d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}(X) = 10$ et $\mathbb{V}(X) = 16$.

   – L'inégalité de Markov donne alors $\mathbb{P}(X \geqslant 15) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

– L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant 5\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{5^2} = \frac{16}{25}$$

On remarque que $[X\geqslant 15]\subset[|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant 5]$, donc $\mathbb{P}(X\geqslant 15)\leqslant \mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant 5\big)\leqslant \frac{16}{25}$. On obtient donc une majoration légèrement meilleure que celle obtenue par l'inégalité de Markov.

3. Un revendeur doit fixer le stock journalier pour un certain type de produit. Il sait qu'il peut représenter le nombre de produits demandés quotidiennement par les clients par une variable aléatoire X, d'espérance 100 et d'écart-type 8. Il cherche à majorer la probabilité qu'il soit en rupture de stock s'il prévoit un stock de 139 produits par jour.

Il s'agit donc de majorer la probabilité de l'événement $[X\geqslant 140]$ qui correspond à l'événement "la demande dépasse le stock".

On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en remarquant que $[X\geqslant 140]\subset[|X-100|\geqslant 40]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geqslant 140)\leqslant \mathbb{P}\big(|X-100|\geqslant 40\big) &= \mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant 40\big)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{40^2}=\frac{8^2}{40^2}=\frac{1}{25}.\end{aligned}$$

Le revendeur peut alors majorer la probabilité de rupture de stock par $\frac{1}{25}$, soit 4%.

Comme on l'a vu dans la remarque ci-dessus, cette majoration est souvent assez grossière : dans le cas présent, la probabilité de rupture de stock est sûrement bien plus faible que 4%. L'inégalité a toutefois le mérite de donner une majoration fiable sur la probabilité recherchée.

II Loi faible des grands nombres

La loi des grands nombres (dans sa version faible ici), énonce un résultat familier : si on simule un grand nombre de fois la même variable aléatoire réelle X, de manière indépendante, et qu'on prend la moyenne des valeurs obtenues, cette moyenne s'approchera de l'espérance de X.

Voici deux exemples simples.

– Si on lance 10 000 fois une pièce de monnaie équilibrée, et qu'on gagne un euro à chaque *pile* obtenu, il y a toutes les chances qu'on ait gagné une somme proche de 5 000 €. Ceci correspond à simuler 10 000 fois une variable aléatoire $X\hookrightarrow\mathscr{B}(\frac{1}{2})$. Si on fait la moyenne des gains obtenus par lancer, on obtiendra alors une valeur proche de 0,5, qui est l'espérance de X.

– Si on joue un grand nombre n de fois à une machine à sous dans un casino, et qu'on fait la moyenne des gains sur n parties, on approche assez bien l'espérance de gain de la machine. En effet, ceci revient à faire n simulations d'une variable aléatoire X qui correspond au gain pour une partie, et à effectuer la moyenne de ces simulations.

Ceci n'est valide bien sûr que si le nombre de simulations est assez grand. Si on reprend le premier exemple ci-dessus avec 3 lancers, il est tout à fait possible que les trois lancers aient donné *face*, ce qui donne un gain moyen de 0...

Définition - Moyenne empirique

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi. On note

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}.$$

La variable aléatoire $\overline{X}_n$ est appelée *moyenne empirique* des variables $X_1,\dots,X_n$.

Proposition - Espérance et variance de la moyenne empirique

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes *indépendantes*, suivant toutes *la même loi*, admettant une espérance m, et une variance σ^2. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\overline{X}_n$ admet un moment d'ordre deux, et

$$\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = m, \qquad \mathbb{V}\big(\overline{X}_n\big) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{nm}{n} = m.$$

Par ailleurs, comme les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, on a $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$, donc

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad \square$$

Théorème - Loi faible des grands nombres

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes* qui suivent la même loi, admettant un moment d'ordre 2, et d'espérance m.

Si on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, alors :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\big) = 0.$$

On dit alors que la suite de variable $(\overline{X}_n)_n$ converge *en probabilité* vers m, et on note $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m$.

Remarque. La convergence de $(\overline{X}_n)_n$ vers m en probabilité s'écrit de manière équivalente :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| < \varepsilon\big) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\overline{X}_n$, qui admet un moment d'ordre deux : comme $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = m$ et $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, on a

$$\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut.

On obtient la deuxième limite directement en remarquant que $\mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| < \varepsilon\big) = 1 - \mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\big)$. $\square$

Méthode - Estimation d'une espérance

La loi des grands nombres suggère que si on dispose de n variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ indépendantes et de de même loi, et si n est assez grand, alors on peut approcher leur espérance commune par la moyenne de $X_1,\dots,X_n$.

Dans la pratique, pour approcher l'espérance d'une variable aléatoire X dont on sait simuler la loi, on procède comme suit.

1. On simule la loi de X un grand nombre de fois.
2. On fait la moyenne des résultats obtenus pour obtenir une estimation de $\mathbb{E}(X)$.

L'application de ce résultat au cas d'une loi de Bernoulli permet d'obtenir le résultat suivant concernant la loi binomiale.

Proposition

Soient $p \in]0,1[$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Démonstration. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$. On sait que :

$$S_n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ont même loi, donc } \frac{S_n}{n} \text{ et } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ont même loi.}$$

Comme on l'a vu, $\overline{X}_n$ a même espérance que les variables aléatoires X_i, c'est-à-dire que $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = p$. Par la loi faible des grands nombres appliquée à la suite $(X_i)_i$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \;=\; \mathbb{P}\big(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Remarque. Cela justifie l'interprétation intuitive de la probabilité d'un événement et son approximation par les fréquences observées : si on veut approcher la probabilité d'un événement A lié à une expérience aléatoire qu'on sait simuler, on peut obtenir cette estimation de la manière suivante.

- On simule un grand nombre n de fois l'expérience, et on compte le nombre k de fois où l'événement considéré a été réalisé.
- On calcule la fréquence de réalisation de l'événement en faisant la moyenne $\frac{k}{n}$. Cette moyenne approche la probabilité $\mathbb{P}(A)$.

En effet, ceci revient à simuler la variable aléatoire S_n qui correspond au nombre de cas où l'événement A s'est produit après n répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire. Cette v.a. suit donc la loi $\mathscr{B}(n,p)$, où $p = \mathbb{P}(A)$, ce qui implique que $\mathbb{E}\big(\frac{S_n}{n}\big) = \frac{n\mathbb{P}(A)}{n} = \mathbb{P}(A)$. Par ce qui précède, on a donc

$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} \mathbb{P}(A).$$

Jeu de Pile ou Face.

On chercher à vérifier la remarque précédente avec un lancer de pièce.

1. Simuler n lancers et déterminer la fréquence de 'Pile' obtenus pour $n = 100, 1\,000, 10\,000$ et $100\,000$ avec $p = 0{,}5$.
2. Essayer avec une autre valeur de p.

III Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Théorème - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier $n \geqslant \lambda$, X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \;=\; \mathbb{P}(X = k),$$

où $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n > \lambda$. Si de plus $n \geqslant k$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) \;=\; \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{n^k}\,\mathrm{e}^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\,\mathrm{e}^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\end{aligned}$$

On a d'une part

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \;=\; \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\dots\,\frac{n-k+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'autre part,

$$(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim (n-k)\left(-\frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{\lambda(n-k)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda,$$

donc $(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, et $\mathrm{e}^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$. Finalement,

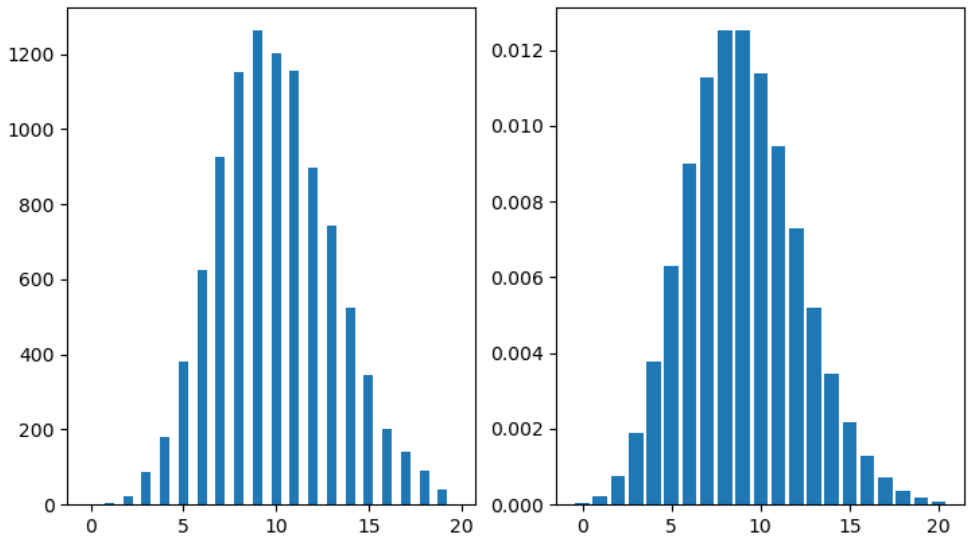
$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X=k), \quad \text{si } X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda). \qquad \square$$

Remarque. Ce résultat exprime qu'il y a convergence (en un certain sens) de la loi de X_n vers la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ (on parlera plus tard de convergence *en loi*).
Dans la pratique, ceci signifie que lorsque n devient grand, la loi $\mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ s'approche de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Approximation de $\mathscr{B}(n,p)$ par $\mathscr{P}(np)$. Lorsqu'une variable aléatoire suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, où n est grand et p petit, il arrive qu'on fasse l'approximation qui consiste à remplacer la loi $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi $\mathscr{P}(np)$ (qui ont d'ailleurs même espérance). Cette approximation est suggérée par le résultat de convergence ci-dessus.

Python.

1. Faire 10 000 simulations d'un loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda = 10$ et tracer l'histogramme pour des classes entre 0 et 20.
2. En remarquant que pour une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1}\mathbb{P}(X=k),$$

   créer le tableau des probabilités pour $k = 0, \ldots, 20$ d'une loi de Poisson de paramètre 10.
3. Tracer le diagramme en bâtons associé et comparer avec l'histogramme de la loi binomiale.