DM 1

Exercice 1.

1. Montrer que la proposition "$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n^2$" est fausse.
2. Montrer en revanche que "$\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$" est vraie. On pourra raisonner par récurrence.

1. Montrons que la proposition est fausse, c'est-à-dire que sa négation ($\exists n \in \mathbb{N},\ 2^n < n^2$) est vraie.

   Posons $n_0 = 3$. On a $2^{n_0} = 8 < {n_0}^2$.

   On a donc bien montré que ($\exists n \in \mathbb{N},\ 2^n < n^2$) est vraie, donc $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n^2\right)$ est fausse.
2. Montrons par récurrence sur que la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$2^n \geqslant n^2$", est vraie pour tout $n \geqslant 4$.
   - *Initialisation.* Si $n = 4$, on a $2^n = 16 = n^2$, donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, on a
   $$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2n^2.$$
   Nous allons montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, ce qui nous permettra de conclure que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$, et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a
   $$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1.$$
   Les racines du polynôme $x^2 - 2x - 1$ sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. On en conclut alors que pour tout $x \geqslant 1 + \sqrt{2}$, on a $x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$.
   Comme $n \geqslant 4 > 1 + \sqrt{2}$, on a bien $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$, ce qui donne $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$. On pourra raisonner par récurrence.

Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a
$$u_{2n} = u_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1.$$
Par conséquent, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2n} = \frac{1}{2}$, et $u_{2n+1} = -1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{1}{2}$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = -1$. On a
$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1.$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

Exercice 3. Soit la fonction polynomiale P définie, pour tout réel x par

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer des réels a, b, c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.
4. Résoudre l'équation (E) : $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} + 1 - 6\mathrm{e}^{-x} = 0$.

1. On a $P(1) = 0$, donc 1 est racine du polynôme P.
2. On peut procéder par identification : si $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$, alors $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. En identifiant coefficient par coefficient, on obtient donc que
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 4 \\ c - b = 1 \\ -c = -6 \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$
Finalement, $P(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Le polynôme $x^2 + 5x + 6$ a pour racines -3 et -2. Comme $P(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6)$, on en déduit que l'équation $P(x) = 0$ a trois solutions : -3, -2 et 1.
4. En multipliant l'équation par e^{x} (qui est strictement positif), on obtient que l'équation (E) équivaut à $\mathrm{e}^{3x} + 4\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$. Maintenant, en posant $y = \mathrm{e}^{x}$, on remarque que (E) se récrit
$$\begin{cases} y^3 + 4y^2 + y - 6 = 0 \\ y = \mathrm{e}^{x} \end{cases}$$
Comme les trois solutions de $y^3 + 4y^2 + y - 6 = 0$ sont -3, -2 et 1, on en déduit que la seule solution de l'équation (E) correspond à $y = 1$, les autres valeurs étant négatives. Finalement, la seule solution de (E) est alors $\ln 1 = 0$.
