DM 2

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$.
2. *a.* Si m est un réel fixé, déterminer une racine évidente du polynôme $x^2 - (m+1)x + m$.

   b. Selon les valeurs du paramètre réel $m \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $x^2 + m \geqslant (m+1)x$.

1. On remarque que 2 est racine du polynôme $x^3 - x^2 - x - 2$, donc ce polynôme se récrit sous la forme $(x-2)(ax^2 + bx + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, ou encore, en développant :

$$ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

   Ainsi, par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b - 2a = -1$, $c - 2b = -1$, $-2c = -2$, ce qui donne $a = b = c = 1$. Par conséquent, l'équation se récrit donc $(x-2)(x^2+x+1) < 0$.

   Le discriminant de $x^2 + x + 1$ vaut -3, donc ce polynôme est de signe constant. Par ailleurs, comme il vaut 1 en 0, on en déduit que $x^2 + x + 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(x-2)(x^2+x+1)$ est du signe de $x - 2$. L'ensemble solution est alors $]-\infty, 2[$.
2. *a.* On remarque que 1 est racine du polynôme $x^2 - (m+1)x + m$.

   b. Soit $m \in \mathbb{R}$. Comme 1 est racine du polynôme $x^2 - (m+1)x + m$, on en déduit que l'autre racine est m. Dans le cas où $m = 1$, les deux racines sont confondues, et valent 1.

   Ainsi,
   - si $m < 1$, l'ensemble des solutions est $]-\infty, m] \cup [1, +\infty[$,
   - si $m = 1$, $x^2 - (m+1)x + m$ est de signe constant, et est positif, donc tout réel est solution,
   - si $m > 1$, l'ensemble des solutions est $]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[$.

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue x :

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2.$$

On pourra par exemple raisonner par analyse-synthèse.

Le domaine de validité de l'équation est $D = [-\frac{3}{2}, +\infty[$. Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse :* soit $x \in D$ solution de l'équation. On a donc $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2} + 2$. En élevant au carré chaque membre de l'égalité, on obtient

$$2x + 3 \;=\; x + 2 + 4\sqrt{x+2} + 4, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x - 3 = 4\sqrt{x+2}.$$

  En élevant au carré à nouveau, on obtient $x^2 - 6x + 9 = 16(x+2)$, soit $x^2 - 22x - 23 = 0$. Les solutions de cette dernière équation [a] sont -1 et 23.
- *Synthèse :* on remarque que -1 n'est pas solution de l'équation, en revanche 23 est solution.

Finalement, l'équation a une unique solution, qui est 23.

a. On remarque que -1 est racine de $x^2 - 22x - 23$. Comme le produit des racines est donné par -23, on obtient que la seconde racine est 23.

Exercice 3. On souhaite montrer :

$$\text{pour tout } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad \text{on a} \quad \left|\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{2}{9}. \qquad (\star)$$

1. *1$^{\text{ère}}$ méthode.*

   a. Faire l'étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

   b. En déduire $(\star)$.

2. *2$^{\text{ème}}$ méthode.*

   a. Justifier que $(\star)$ équivaut à : pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $-2x^2 \leqslant -18 + 9x \leqslant 2x^2$.

   b. En faisant un étude de signe de deux expressions polynomiales de degré 2, en déduire $(\star)$.

---

1. *a.* La fonction f est bien définie et dérivable sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, on a

$$f'(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3} \geqslant 0.$$

   Ainsi, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

   b. On déduit de la croissance de f sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ que $f\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Comme $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{9}$ et $f(2) = 0$, on a donc

$$\text{pour tout } x \in \left[\tfrac{3}{2}, 2\right], \quad -\tfrac{2}{9} \leqslant -\tfrac{2}{x^2} + \tfrac{1}{x} \leqslant 0, \quad \text{donc} \quad \left|\tfrac{-2}{x^2} + \tfrac{1}{x}\right| \leqslant \tfrac{2}{9}.$$

2. *a.* L'inégalité $\left|\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{2}{9}$ équivaut à $-\frac{2}{9} \leqslant \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{9}$, ou encore, en multipliant l'inégalité par $9x^2$ qui est strictement positif,

$$-2x^2 \leqslant -18 + 9x \leqslant 2x^2.$$

   b.
   - Les racines du polynôme $2x^2 + 9x - 18$ sont -6 et $\frac{3}{2}$, donc $2x^2 + 9x - 18 \geqslant 0$ pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.
   - Le polynôme $2x^2 - 9x + 18$ a pour discriminant -63, donc $2x^2 - 9x + 18$ est de signe constant, positif. Ainsi, $2x^2 - 9x + 18 \geqslant 0$ pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.

   Ainsi, on a bien montré que $-2x^2 \leqslant -18 + 9x \leqslant 2x^2$ pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$, ce qui conclut.