DM 3

Corrigé

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

On introduit la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$. Nous allons montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\sin x + x.$$

Pour déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$, nous allons étudier cette fonction. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -\cos x + 1.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leqslant 1$, on a $f''(x) \geqslant 0$. Finalement, f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme par ailleurs $f'(0) = 0$, on en déduit que f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f atteint un minimum global en 0, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) \geqslant f(0) = 0.$$

Exercice 2. Trouver toutes les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'équation $\cos^2(3x) = 1$.

On sait que si $a \in \mathbb{R}$, alors $a^2 = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ ou } a = -1)$. Ainsi,

$$\cos^2(3x) = 1 \iff (\cos(3x) = 1 \text{ ou } \cos(3x) = -1).$$

Résolvons donc les deux équations obtenues ci-dessus :

- On sait que $\cos(3x) = 1 \iff 3x = 0\ [2\pi]$. Autrement dit,

  $$\cos(3x) = 1 \text{ ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = 2k\pi, \text{ i.e. } x = \frac{2k\pi}{3}.$$

  Les solutions de $\cos(3x) = 1$ dans $]-\pi, \pi]$ sont donc $-\frac{2\pi}{3}$, 0 et $\frac{2\pi}{3}$.
- On a $\cos(3x) = -1 \iff 3x = \pi\ [2\pi]$. Autrement dit,

  $$\cos(3x) = -1 \text{ ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = \pi + 2k\pi, \text{ i.e. } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}.$$

  Les solutions de $\cos(3x) = -1$ dans $]-\pi, \pi]$ sont donc $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ et π.

Finalement, les solutions recherchées sont donc $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan x \geqslant x$.
2. Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in]-\pi/2, 0[$?
3. Donner la valeur de $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.

4. Soient $a, b \in]-\pi/2, \pi/2[$.
   a. Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
   b. Montrer que si $a + b \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, alors
   $$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$
   c. En déduire la valeur de $\tan(\pi/12)$.

1. La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et sa dérivée est donnée par
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$
pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. En particulier, on voit que f' est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc f est croissante sur cet intervalle. Par conséquent, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui donne bien que $\tan x \geqslant x$.
2. Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, alors $-x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\tan(-x) \geqslant -x$ d'après la question précédente. Comme on a $\tan(-x) = -\tan x$, on en déduit que $-\tan x \geqslant -x$, ce qui équivaut à $\tan x \leqslant x$.
3. On a $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
4. a. On a
$$\begin{aligned}\tan a \tan b = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin a \sin b = \cos a \cos b \\ &\Leftrightarrow \quad \cos a \cos b - \sin a \sin b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a + b = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } a + b = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$
   Comme $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $-\pi < a + b < \pi$. On en déduit que $\tan a \tan b = 1$ si et seulement si $a + b = \frac{\pi}{2}$ ou $a + b = -\frac{\pi}{2}$.
   b. On suppose que $a + b \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, alors
$$\begin{aligned}\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \quad &= \quad \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \quad \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \quad \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.\end{aligned}$$
   c. On pose $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = -\frac{\pi}{4}$, de sorte que $a+b = \frac{4\pi - 3\pi}{12}$. On écrit la formule de la question précédente qui est valable car $a + b \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$:
$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan(-\frac{\pi}{4})}{1 - \tan \frac{\pi}{3}(-\tan \frac{\pi}{4})} = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \times 1},$$
   car $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$. Finalement,
$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$
   N.B. : On pouvait aussi poser $a = b = \frac{\pi}{12}$, et utiliser la formule de la question précédente pour obtenir une relation entre $\tan \frac{\pi}{6}$, que l'on connaît, et $\tan \frac{\pi}{12}$. Cette option menait à la résolution d'une équation du second degré pour retrouver $\tan \frac{\pi}{12}$.