

DM 3

à rendre pour le 08.10.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 2. Trouver toutes les solutions dans $] -\pi, \pi]$ de l'équation $\cos^2(3x) = 1$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan x \geq x$.
2. Quelle inégalité peut-on en déduire pour tout $x \in] -\pi/2, 0[$?
3. Donner la valeur de $\tan(\pi/6)$ et $\tan(\pi/3)$.
4. Soient $a, b \in] -\pi/2, \pi/2[$.
 - a. Montrer que $\tan(a)\tan(b) = 1$ si et seulement si $a + b = -\frac{\pi}{2}$ ou $a + b = \frac{\pi}{2}$.
 - b. Montrer que si $a + b \notin \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$, alors

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

- c. En déduire la valeur de $\tan(\pi/12)$.