

DM 4

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = \frac{u_k}{2^k}$.

1. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, calculer $v_{k+1} - v_k$ en fonction de k .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ de deux manières différentes, et en déduire une expression de v_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{k+1} - v_k = \frac{u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k} = \frac{2u_k + k(k-1)2^k}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k} = \frac{u_k}{2^k} + \frac{k(k-1)}{2} - \frac{u_k}{2^k} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

2. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{12} ((2n+1) - 3) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, par télescopage, on a aussi $\sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0 = v_{n+1} - 1$.

Par conséquent, en combinant avec ce qui précède, on obtient

$$v_{n+1} - 1 = \frac{n(n+1)(n-1)}{6} + 1, \text{ donc } v_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 1.$$

En factorisant, on trouve $v_n = \frac{(n+1)(n^2-4n+6)}{6}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n v_n$, donc $u_n = \frac{2^n}{6} (n+1)(n^2-4n+6)$.

Exercice 2. Calculer la somme $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \max(i, j) \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \max(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right). \end{aligned}$$

Or $\sum_{j=0}^i i = i \sum_{j=0}^i 1 = i(i+1)$ et $\sum_{j=i+1}^n j = \sum_{j=0}^n j - \sum_{j=0}^i j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3+6(n+1))}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}. \end{aligned}$$

Autre méthode : on peut aller un peu plus vite en commençant par remarquer que

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \max(i, j) + \sum_{i=0}^n i + \sum_{0 \leq j < i \leq n} \max(i, j) = \sum_{i=0}^n i + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \underbrace{\max(i, j)}_{=j}.$$