

DM 4

à rendre pour le 15.10.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = \frac{u_k}{2^k}$.

1. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, calculer $v_{k+1} - v_k$ en fonction de k .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ de deux manières différentes, et en déduire une expression de v_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Calculer la somme $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.
