DM 5

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1. *a.* Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   b. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
2. *a.* Justifier que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+^\star)$ de la fonction, en justifiant.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. Montrer que f définit une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

1. *a.* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, le réel $\frac{1}{x}\ln x$ est bien défini, donc $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$ l'est également. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   b. *Limite en* 0 : on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

   $$\text{Par composition, comme } \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0, \text{ on a alors } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

   Limite en $+\infty$: par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

   $$\text{Par composition, comme } \lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = 1, \text{ on a alors } f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. *a.* – La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
   – La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Par composition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a

   $$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\, x^{\frac{1}{x}}.$$

   b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Comme $x^{\frac{1}{x}} > 0$ et $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. Or on a

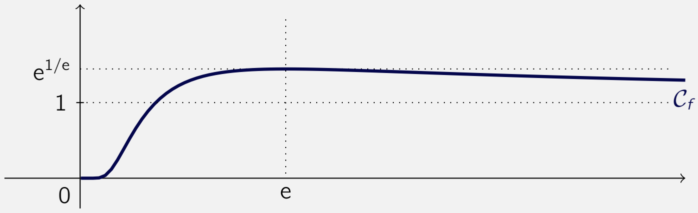
   $$1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}.$$

   Nous obtenons le tableau de variations suivant.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| 0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	1

   c. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc $f(\mathbb{R}_+^\star)$ est un intervalle.
   Par ailleurs, d'après la question précédente, la fonction f a pour infimum 0, qui n'est pas atteint, et pour maximum $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, qui est atteint en e. Par conséquent, on a $f(\mathbb{R}_+^\star) = \left]0, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right]$.

3. D'après ce qui précède on obtient l'allure suivante.



Justifions que la tangente horizontale en 0^+ : il s'agit de montrer que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$: on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-\ln x}{x^2}\,e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1}{x^2}\,e^{\frac{\ln x}{x}} - \ln x\,e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}\,\frac{1}{(\ln x)^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}\,\frac{1}{\ln x}. \end{aligned}$$

Or par croissances comparées, on a $\lim_{u\to -\infty} u^2 e^u = 0$, donc par composition $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$. Comme par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$, on bien $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$.

4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$: en effet, on a vu que f' est strictement négative sur $[e, +\infty[$, sauf en e où elle s'annule.

   Par conséquent, le théorème de la bijection assure que f définit une bijection de $[e, +\infty[$ sur son ensemble image, qui est donné par $\left]1, e^{\frac{1}{e}}\right]$, d'après ce qui précède.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

1. Un calcul donne $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
2. On en déduit que $A^2 - 3A = -2I_3$, c'est-à-dire $A(A - 3I_n) = -2I_3$. En divisant l'égalité par -2, on obtient que $A\left(-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_n$, ce qui implique que A est inversible, et

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels a_n, b_n tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et préciser les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En déduire l'expression explicite de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de A^n.

1. on a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la proposition $\mathcal{P}(n)$: il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   – *Initialisation.* Comme $A^0 = I_3$, il suffit de prendre $a_0 = b_0 = 0$ pour voir que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   – *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors si on note a_n et b_n les réels de la proposition $\mathcal{P}(n)$, on a

   $$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_n + 1 & a_n + b_n \\ 0 & 1 & a_n + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, si on pose $a_{n+1} = a_n + 1$, et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a bien $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On a donc bien montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les relations de récurrence obtenues sont donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $a_0 = 0$, on en déduit donc que $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{n+1} = b_n + n$.

   Pour déterminer l'expression de b_n, on remarque que par somme télescopique, on a

   $$b_n - b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k(n-k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$.
2. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En ayant recours au changement d'indice $i = n - k$, montrer que $S_n = (-1)^n S_n$.
4. Déduire de la question précédente que $S_{2n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, donner l'expression de $S_{2n} - S_{2n-1}$.

   b. Déduire alors des questions 4. et 1. la valeur de S_{2n} lorsque $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $U_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On raisonne par exemple par récurrence : on va montrer que $\mathcal{P}(n)$: "$U_n = n$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   – *Initialisation :* pour $n = 0$, on a $U_n = \sum_{k=1}^{0}(-1)^k k = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   – *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

   $$\begin{aligned} U_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k k &= \left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k\right) + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2) \\ &= U_n - (2n+1) + (2n+2) \\ &= n+1, \end{aligned}$$

   du fait que, par hypothèse de récurrence, $U_n = n$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc bien montré par récurrence que $U_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

2. On a
$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{0}(-1)^k k(1-k) = 0, \\ S_2 &= \sum_{k=1}^{1}(-1)^k k(2-k) = (-1)1(2-1) = -1, \\ S_3 &= \sum_{k=1}^{2}(-1)^k k(3-k) = (-1)1(3-1) + 2(3-2) = 0, \\ S_4 &= \sum_{k=1}^{3}(-1)^k k(4-k) = (-1)1(4-1) + 2(4-2) - 3(4-3) = -2. \end{aligned}$$

3. En faisant le changement d'indice $i = n - k$, on obtient que

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k(n-k) &= \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i}(n-i)i \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{-i}(n-i)i \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}(n-i)i, \end{aligned}$$

   car $(-1)^{-i} = \frac{1}{(-1)^i} = \left(\frac{1}{-1}\right)^i = (-1)^i$. Finalement, comme l'indice i est muet, on peut écrire :

$$S_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k (n-k)k = (-1)^n S_n.$$

4. D'après la question précédente, on a $S_{2n+1} = (-1)^{2n+1} S_{2n+1} = -S_{2n+1}$, donc $S_{2n+1} = 0$.

5. *a.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k(2n-k) - \sum_{i=1}^{2n-2}(-1)^k k(2n-1-k).$$

   On remarque que $\sum_{i=1}^{2n-2}(-1)^k k(2n-1-k) = \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k(2n-1-k)$, du fait que le dernier terme de la deuxième somme est nul. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2n-1} &= \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k(2n-k) - \left(\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k(2n-k) - \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^k k. \end{aligned}$$

   D'après la question 1, on a alors $S_{2n} - S_{2n-1} = \left(\sum_{i=1}^{2n}(-1)^k k\right) - (-1)^{2n}2n = n - 2n = -n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on sait d'après la question 4 que $S_{2n-1} = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $S_{2n} = -n + S_{2n-1} = -n$. Par ailleurs, comme $S_0 = 0$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n} = -n.$$

Exercice 5. *Facultatif.*

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux familles de nombres réels. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Pour cela, on introduit la fonction $P : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x|a_i| + |b_i|)^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe α, β, γ tels que pour tout réel x, $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
2. Que peut-on dire du signe de la fonction polynomiale P ?
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. A quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?
5. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$
