DM 5

à rendre pour le 04.11.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1. *a.* Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   b. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
2. *a.* Justifier que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c. Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R}_+^\star)$ de la fonction, en justifiant.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. Montrer que f définit une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels a_n, b_n tels que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
et préciser les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'expression explicite de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de A^n.

Exercice 4. On cherche à calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k(n-k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = n$.
2. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En ayant recours au changement d'indice $i = n - k$, montrer que $S_n = (-1)^n S_n$.
4. Déduire de la question précédente que $S_{2n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, donner l'expression de $S_{2n} - S_{2n-1}$.

   b. Déduire alors des questions 4. et 1. la valeur de S_{2n} lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. *Facultatif.*

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ deux familles de nombres réels. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Pour cela, on introduit la fonction $P : x \mapsto \sum_{i=1}^n (x|a_i| + |b_i|)^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe α, β, γ tels que pour tout réel x, $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
2. Que peut-on dire du signe de la fonction polynomiale P ?
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. A quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?
5. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$
