Concours Blanc 1 – DS 3

Corrigé

Exercice 1 – Un calcul de somme

1. On considère des réels a, b et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \ = \ (ak+b)\,2^k.$$

Déterminer des valeurs de a et b pour avoir :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k \ = \ (k+2)\,2^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,2^k$ en fonction de n.

3. Recopier et compléter le script Python suivant pour afficher la somme ci-dessus calculée à l'aide d'une boucle `for` dans le cas où $n = 100$.

```
S=0
n=100
for ...:
    S=...
print(...)
```

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k \ = \ (a(k+1)+b)\,2^{k+1} - (ak+b)\,2^k \quad &= \quad (2a(k+1)+2b-(ak+b))\,2^k \\ &= \quad (ak+2a+b)\,2^k \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a = 1$ et $b = 0$, on a bien $u_{k+1} - u_k = (k+2)\,2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On conserve les valeurs $a = 1$ et $b = 0$ trouvées à la question précédente, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_k = k2^k$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,2^k \ = \ \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \ = \ u_{n+1} - u_0 \ = \ (n+1)\,2^{n+1},$$

car la dernière somme est télescopique.

3.
```
S=0
n=100
for k in range(n+1):
    S=S+(k+2)*2**k
print(S)
```

Exercice 2 – Étude de fonction

On se propose d'étudier sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction

$$f \ : \ x \ \mapsto \ x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)$$

1. On introduit la fonction
$$g \ : \ u \ \mapsto \ \frac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}.$$
   a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g'(u) = 1 - g(u)^2$.

   b. En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, on a $g(u) - u \leqslant 0$.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,
$$f'(x) \text{ est du même signe que } g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$
   En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^\star$.
4. Préciser les limites $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
5. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
   Dresser le tableau de variations de f, et tracer l'allure de sa courbe représentative.
6. Soit $y \in]2, +\infty[$. Combien de solutions l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet-elle ?

---

1. *a.* La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur ne s'annule pas, et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$g'(u) \ = \ \frac{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^2 - (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})^2}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^2} \ = \ 1 - \frac{(\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})^2}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^2} \ = \ 1 - g(u)^2.$$
   b. On introduit la fonction $h : u \mapsto g(u) - u$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$h'(u) \ = \ g'(u) - 1 \ = \ -g'(u)^2.$$
   Ainsi, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme on a $h(0) = g(0) = 0$, on en déduit que $h(u) \leqslant h(0) = 0$, c'est-à-dire $g(u) - u \leqslant 0$ pour tout $u \geqslant 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(-x) \ = \ -x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) \ = \ x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) \ = \ f(x).$$
   Ainsi, la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$. On pourra se contenter de faire l'étude de f sur $\mathbb{R}_+$, et déduire son étude sur $\mathbb{R}_-$ par parité.
3. – Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^\star$,
   – la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$,

   donc par composition $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^\star$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit de telles fonctions.

   Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, on a
$$\begin{aligned} f'(x) \ = \ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) \ &= \ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right) \\ &= \ \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \ \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)\left(g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$
   Comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} > 0$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

   Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$, donc $g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leqslant 0$ d'après 1b. D'après ce qui précède on a alors $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$.

4. On a $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u}=+\infty$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}=0$.

   Comme $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, on a alors par composition de limites

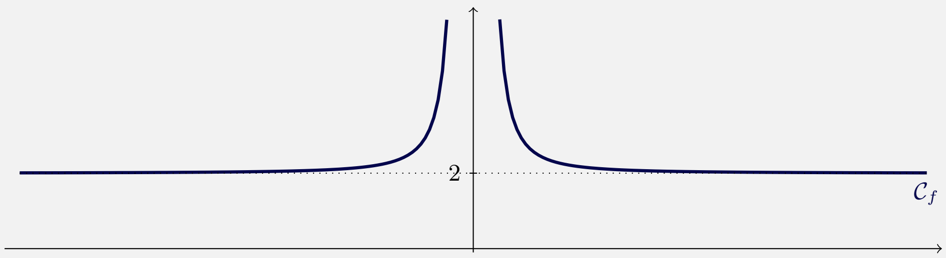
$$x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

   Ainsi, $f(x)=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Par parité, on a alors $f(x) \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} +\infty$.

5. D'après ce qui précède, on a le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

   On obtient l'allure du graphe de f :



6. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc par le théorème de la bijection, elle est bijective de $]0,+\infty[$ sur son ensemble image $]2,+\infty[$.

   Ainsi, si $y\in]2,+\infty[$, l'équation $y=f(x)$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$. Par parité de f, on en déduit qu'elle admet aussi une unique solution sur $]-\infty,0[$. Par conséquent, l'équation admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 3 – Une classe de matrices

Pour tout réel t, on pose

$$A(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut $A(0)$?

2. Soient $s,t\in\mathbb{R}$. Calculer $A(t)A(s)$, et montrer qu'il existe $u\in\mathbb{R}$ qu'on exprimera en fonction de s et t tel que

$$A(t)A(s) \;=\; A(u). \tag{1}$$

3. On note $B=A\left(\frac{1}{2}\right)$. Écrire la matrice B et déterminer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que

$$B\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   En déduire que B n'est pas inversible.

4. À l'aide de la question 1 et de la relation (1), montrer que si $t\neq\frac{1}{2}$, alors $A(t)$ est inversible.

1. On a $A(0) = I_3$.
2. Un calcul de produit matriciel donne
$$A(t)A(s) \;=\; \begin{pmatrix} 1-s-t+2ts & -s-t+2ts & 0 \\ -s-t+2ts & 1-s-t+2ts & 0 \\ -s-t+2ts & s+t-2ts & 1-2s-2t+4ts \end{pmatrix}.$$
On remarque donc que $A(t)A(s) = A(u)$ avec $u = s+t-2ts$.
3. On a
$$B \;=\; A\left(\tfrac{1}{2}\right) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$
On remarque que $B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ conviennent.
Supposons que B soit inversible. Alors
$$B^{-1}B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mais on a aussi} \quad B^{-1}B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Il y a donc contradiction, et on a montré que B n'est pas inversible.
4. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Si on trouve $s \in \mathbb{R}$ tel que $s+t-2ts = 0$, on aura alors
$$A(t)A(s) \;=\; A(0) \;=\; I_3,$$
et on aura montré que $A(t)$ est inversible, d'inverse $A(s)$.
On a
$$s+t-2ts \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; s(2t-1) \;=\; t \;\Leftrightarrow\; s \;=\; \frac{t}{2t-1},$$
car $t \neq \frac{1}{2}$, donc $2t-1 \neq 0$. Ainsi, on a bien montré que $A(t)$ est inversible, et
$$A(t)^{-1} \;=\; A\left(\frac{t}{2t-1}\right).$$

Exercice 4 – Approximation de π

Partie I – Un encadrement de π

On considère l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et on note, pour tout $x \in I$,
$$f(x) \;=\; \frac{1}{3}\left(2\sin(x) + \tan(x)\right), \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

1. *a.* On considère le polynôme $P(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1$. Justifier l'existence de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$P(y) \;=\; (y-1)(ay^2 + by + c),$$
et déterminer les réels a, b, c qui conviennent.

   b. Déterminer les racines de P, et en déduire une factorisation de P. Justifier que pour tout $y \in]0, 1[$, $P(y) > 0$.
2. On introduit la fonction
$$u \;:\; x \mapsto f(x) - x.$$
   a. Justifier que u est dérivable sur I et montrer que pour tout $x \in I$,
$$u'(x) \;=\; \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

b. En déduire les variations de u sur I.

3. On introduit la fonction
$$v \ : \ x \mapsto x - g(x).$$

   a. Justifier que pour tout $x \in I$,
$$v'(x) \ = \ \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2},$$
   où Q est le polynôme donné par $Q(y) = y^2 - 2y + 1$.

   b. Déterminer le signe de $Q(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$. En déduire les variations de v sur I.

4. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).$$

Partie II – Deux suites approchant π

On pose pour tout entier naturel n,
$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

5. Justifier que pour tout réel θ,
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$
   et en déduire que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (\star) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (\star\star)$$

6. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \ < \ \pi \ < \ 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

7. En admettant la limite :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \ = \ 1,$$
   justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

8. Recopier et compléter le script Python suivant afin qu'il affiche, à l'aide des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ et de la question 6, une approximation de π à 10^{-5} près.

```python
import numpy as np
k=0
a=np.sqrt(3)/2
b=1/2
while ...:
    a=...
    b=...
    k=...
print("Approximation de pi : ",...)
```

Ecricome – 2015

1. *a.* On remarque que $P(1) = 0$, donc P est de la forme $P(y) = (y-1)(ay^2+by+c)$. En développant, on obtient
$$P(y) \ = \ ay^3 + (b-a)y^2 + (c-b)y - c.$$

En identifiant avec les coefficients de P, on obtient

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 0 \\ -c = 1 \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Finalement, $P(y) = (y-1)(2y^2 - y - 1)$.

b. Les racines du polynôme $2y^2 - y - 1$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Par conséquent, les racines de P sont également 1 et $-\frac{1}{2}$. On a

$$P(y) = 2(y-1)^2\left(y + \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(y)$ est du signe de $y + \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $y \in [0,1]$, on a bien $P(y) \geqslant 0$.

2. *a.* La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et tan est dérivable sur I, donc f est dérivable sur I. Puisque $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction u est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. On a alors pour tout $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{3\cos^2 x} = \frac{P(\cos x)}{3\cos^2 x}.$$

b. Si $x \in I$, on a $\cos(x) \in]0,1[$, donc $P(\cos(x)) > 0$ d'après 1b. Par conséquent, $u'(x) > 0$ sur I, et donc u est strictement croissante sur I.

3. *a.* La fonction g est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction v est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I.

On a alors pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} v'(x) &= 1 - \frac{3\cos(x)(2+\cos x) + 3\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} \\ &= \frac{(2+\cos x)^2 - 6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3\left(1 - \cos^2(x)\right)}{(2+\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1}{(2+\cos(x))^2} = \frac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2}. \end{aligned}$$

b. On a $Q(y) = (y-1)^2$, donc $Q(y) > 0$ pour tout $y \neq 1$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a $Q(\cos(x)) > 0$, car $\cos(x) < 1$.

Par conséquent, v' est strictement positive sur I, et donc v est strictement croissante sur I.

4. – Comme u est strictement croissante sur I, on a pour tout $x \in I$, $u(x) > u(0) = 0$, c'est-à-dire $f(x) - x > 0$.
   – Comme v est strictement croissante sur I, on a pour tout $x \in I$, $v(x) > v(0) = 0$, c'est-à-dire $x - g(x) > 0$.

   On a donc bien $g(x) < x < f(x)$ pour tout $x \in I$.

5. Pour tout réel θ, on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2a_{n+1}^2$$

Soit encore $a_{n+1}^2 = \frac{1-b_n}{2}$.
Mais $0 \leqslant \frac{\pi}{3 \times 2^n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, de sorte que $a_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \geqslant 0$ et donc

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.$$

De plus, on a $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 1$ soit
$b_{n+1}^2 = 1 - \frac{1-b_n}{2} = \frac{1+b_n}{2}$.
Mais $b_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \geqslant 0$ car $0 \leqslant \frac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \pi$ et donc

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$

6. En utilisant le résultat de la question 4, on a, pour tout entier naturel n,

$$g\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3\times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

soit

$$3\,\frac{a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3\times 2^n} < \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{i.e.} \quad 9\times 2^n\,\frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

7. On a $\frac{\pi}{3\times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1, \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{\frac{\pi}{3\times 2^n}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)}{\frac{\pi}{3\times 2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

d'après le résultat admis dans l'énoncé. Ainsi,

$$9\times 2^n\,\frac{a_n}{2+b_n} = \frac{9\times 2^n}{2+b_n}\,\frac{a_n}{\frac{\pi}{3\times 2^n}}\,\frac{\pi}{3\times 2^n} = \frac{3\pi}{2+b_n}\,\frac{a_n}{\frac{\pi}{3\times 2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \pi.$$

Par ailleurs,

$$2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) = 2^n\left(2 + \frac{1}{b_n}\right)\frac{a_n}{\frac{\pi}{3\times 2^n}}\,\frac{\pi}{3\times 2^n} = \frac{\pi}{3}\left(2+\frac{1}{b_n}\right)\frac{a_n}{\frac{\pi}{3\times 2^n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \pi.$$

Ainsi, les deux termes de l'encadrement de la question précédente tendent bien tous deux vers π lorsque $n \to +\infty$.

8.
```python
import numpy as np
k=0
a=np.sqrt(3)/2
b=1/2
while 2**k*(2*a+a/b)-9*2**k*a/(2+b)>10**(-5):
    a=np.sqrt((1-b)/2)
    b=np.sqrt((1+b)/2)
    k=k+1
print("Approximation de pi : ",2**k*(2*a+a/b))
```

Exercice 5 – Puissances d'une matrice

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice, on propose deux méthodes de calcul des puissances successives de M. Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - Utilisation d'une relation polynomiale

1. Calculer M^2 et M^3, et vérifier que $-M^3+3M^2-2M=0_3$, où 0_3 désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer $-M^2+3M-2I_3$, et déduire que M n'est pas inversible.

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par : $x_1=0$, $y_1=1$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+y_n, \\ y_{n+1}=-2x_n \end{cases}$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,
$$M^n \;=\; x_nM^2+y_nM.$$
4. *a.* Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, exprimer x_{n+2} en fonction de x_{n+1} et x_n.
   b. Montrer par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $x_n=2^{n-1}-1$.
   c. Déduire de la question précédente l'expression de y_n pour $n\in\mathbb{N}^\star$.
5. Déduire de la question 3 l'expression de M^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^\star$.

Partie II - Diagonalisation

6. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-3&2&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.
7. Calculer explicitement la matrice $D=P^{-1}MP$.
8. Exprimer D^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^\star$.
9. Montrer que $M^n=PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de M^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. On trouve
$$M^2=\begin{pmatrix}-5&5&-4\\-6&6&-4\\3&-3&4\end{pmatrix},\quad M^3=\begin{pmatrix}-9&9&-8\\-10&10&-8\\7&-7&8\end{pmatrix}.$$
On a donc
$$-M^3+3M^2-2M \;=\; \begin{pmatrix}9-15+6 & -9+15-6 & 8-12+4\\ 10-18+8 & -10+18-8 & 8-12+4\\ -7+6-2 & 7-9+2 & -8+12-4\end{pmatrix} \;=\; 0_3.$$
2. Par la question précédente, on a
$$M(-M^2+3M-2I_3)=0_3.$$
Il suffit donc de montrer que $-M^2+3M-2I_3\neq 0_3$ pour obtenir que M est inversible [a]. D'après les calculs précédents,
$$-M^2+3M-2I_3 \;=\; \begin{pmatrix}-6&-4&-2\\-6&4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0_3,$$
donc M n'est pas inversible.
3. On raisonne par récurrence. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $\mathcal{P}(n)$: “$M^n=x_nM^2+y_nM$”.
   – *Initialisation.* On a $M=0\,M^2+M=x_1M^2+y_1M$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   – *Hérédité.* Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : on a alors $M^n=x_nM^2+y_nM$. Ainsi,
$$\begin{aligned} M^{n+1}=MM^n=M(x_nM^2+y_nM)=x_nM^3+y_nM^2 &= x_n(3M^2-2M)+y_nM^2\\ &= (3x_n+y_n)M^2-2x_nM\\ &= x_{n+1}M^2+y_{n+1}M. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc bien montré par récurrence $M^n = x_n M^2 + y_n M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. *a.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a
$$x_{n+2} \;=\; 3x_{n+1} + y_{n+1} \;=\; 3x_{n+1} - 2x_n.$$

b. Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$x_n = 2^{n-1} - 1$" est vraie.

- *Initialisation.*
  - On a $x_1 = 0 = 2^{1-1} - 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
  - On a $x_2 = 3x_1 + y_1 = y_1 = 1$. Comme $2^{2-1} - 1 = 1$, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $x_n = 2^{n-1} - 1$ et $x_{n+1} = 2^n - 1$. Ainsi,
$$x_{n+2} \;=\; 3x_{n+1} - 2x_n \;=\; 3(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1) \;=\; 2 \times 2^n - 3 + 2 \;=\; 2^{n+1} - 1.$$
Par conséquent, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $x_n = 2^{n-1} - 1$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on sait que $y_{n+1} = -2x_n$, donc $y_{n+1} = -2(2^{n-1} - 1) = -2^n + 2$. Ainsi, on a $y_n = 2 - 2^{n-1}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$M^n = (2^{n-1} - 1)M^2 + (2 - 2^{n-1})M = 2^{n-1}(M^2 - M) + 2M - M^2.$$
Finalement,
$$M^n \;=\; 2^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1-2^n & 1+2^n & -2^n \\ -2-2^n & 2+2^n & -2^n \\ -1+2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

6. On effectue le calcul :
$$P\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;=\; I_3,$$
donc P est bien inversible, et la matrice ci-dessus est son inverse.

7. On a $D \;=\; P^{-1}MP \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

9. Montrons par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
- *Initialisation.* Comme $D = P^{-1}MP$, on a aussi $M = PDP^{-1}$, donc la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $M^n = PD^nP^{-1}$. On a alors
$$M^{n+1} \;=\; MM^n \;=\; PDP^{-1}PD^nP^{-1} \;=\; PDD^nP^{-1} \;=\; PD^{n+1}P^{-1},$$
donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

La formule donne alors

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2^n & 1+2^n & -2^n \\ -2-2^n & 2+2^n & -2^n \\ -1+2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix},$$

ce qui est conforme avec la question $6.d$.

a. Rappel : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe une matrice non nulle $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = 0$, alors A n'est pas inversible.