

DM 7

Exercice 1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{x^2} + 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J . On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

1. La fonction f n'est pas injective : on a par exemple $f(1) = f(-1)$. Elle n'est par ailleurs pas surjective : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 1$, donc 0 n'a pas d'antécédent par f .
2. La fonction f est dérivable, car $x \mapsto e^{x^2}$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2xe^{x^2}$, donc $f'(x)$ est du signe de x . On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs, on a $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$, donc $e^{x^2} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$. On obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	–	0	+
Variations de f	$+\infty \searrow \quad \quad \nearrow +\infty$ 2		

Comme f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, le théorème de la bijection assure qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur son ensemble image, qui est $J = [2, +\infty[$ d'après ce qui précède.

De même, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$, qui est l'intervalle J .

Déterminons les bijections réciproques des deux bijections introduites ci-dessus. Soit $y \in J = [2, +\infty[$. Résolvons l'équation $y = f(x)$. On a

$$e^{x^2} + 1 = y \Leftrightarrow e^{x^2} = y - 1 \Leftrightarrow x^2 = \ln(y - 1),$$

car $\ln$ est la bijection réciproque de $\exp$. On note que $\ln(y - 1) \geq 0$, car $y - 1 \geq 1$. Ainsi, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{\ln(y - 1)} \text{ ou } x = -\sqrt{\ln(y - 1)} \right).$$

Finalement, l'équation $y = f(x)$ a pour solution :
 * $x = \sqrt{\ln(y - 1)}$ dans $\mathbb{R}_+$,
 * $x = -\sqrt{\ln(y - 1)}$ dans $\mathbb{R}_-$.

On en déduit que :
 – la bijection réciproque de $\mathbb{R}_+ \rightarrow J$ est $J \rightarrow \mathbb{R}_+$,
 $x \mapsto e^{x^2} + 1 \quad y \mapsto \sqrt{\ln(y - 1)}$
 – la bijection réciproque de $\mathbb{R}_- \rightarrow J$ est $J \rightarrow \mathbb{R}_-$,
 $x \mapsto e^{x^2} + 1 \quad y \mapsto -\sqrt{\ln(y - 1)}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

1. Montrer que l'application f n'est pas injective.
2. a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$, alors $a^2 - 4b \geq 0$.
b. En déduire que l'application f n'est pas surjective.

1. On remarque qu'on a par exemple $f(1, 0) = f(0, 1) = (1, 0)$, donc $(1, 0)$ a deux antécédents par f , et f n'est pas injective.

2. a. Soit $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) = (x + y, xy)$. On a alors $a = x + y$ et $b = xy$, ce qui donne

$$a^2 - 4b = (x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2.$$

Ainsi, on a bien $a^2 - 4b \geq 0$.

b. Si on pose $a = 0$ $b = 1$, on a $a^2 - 4b = -4 < 0$, donc d'après la question précédente, $(a, b) \notin f(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, on a trouvé $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que (a, b) n'a pas d'antécédente par f . Ceci entraîne que f n'est pas surjective.

Exercice 3. Dans cet exercice n désigne un entier naturel. Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k$.
2. a. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k$?
b. En déduire que $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

1. On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} = (-2 + 1)^n = (-1)^n$.

2. a. On a $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k = (2 - 1)^{2n} = 1^{2n} = 1$.

b. Si $k, n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^{2n-k} = (-1)^{2n} (-1)^{-k}$. Comme $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{-k} = (-1)^k$, ce qu'on peut voir par exemple en remarquant que $(-1)^k \times (-1)^k = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} \frac{2^k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k.$$

Or $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} 2^k \right) - 1 = 1 - 1 = 0$. On en déduit donc le résultat.