DM 7

à rendre pour le 26.11.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe deux réels a_n, b_n tels que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
et préciser les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'expression explicite de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de A^n.

Exercice 2. On considère l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} + 1. \end{array}$$

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy). \end{array}$

1. Montrer que l'application f n'est pas injective.
2. *a.* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $(a, b) \in f(\mathbb{R}^2)$, alors $a^2 - 4b \geqslant 0$.

   b. En déduire que l'application f n'est pas surjective.
