

DM 8

Exercice 1. Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite si possible) des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$.

4. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leq a < b$.

2. $u_n = \frac{n^2 - n + 4}{-n^2 - 2n - 1}$.

5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

3. $u_n = \frac{\ln^2(n) - 2}{\ln(n) + n}$.

6. $u_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln n}$. Par croissance comparée, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$, où on a utilisé la continuité de la fonction exponentielle.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-n^2 - 2n - 1 = -(n+1)^2 \neq 0$.

Par ailleurs, comme $\frac{n^2 - n + 4}{-n^2 - 2n - 1} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{-n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{-1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\ln^2(n) - 2}{\ln(n) + n} = \frac{(\ln n)^2 \left(1 - \frac{2}{(\ln n)^2}\right)}{n \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)} = \frac{(\ln n)^2}{n} \frac{1 - \frac{2}{(\ln n)^2}}{1 + \frac{\ln n}{n}},$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $\frac{(\ln n)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, en divisant au numérateur et au dénominateur par $b^n \neq 0$, on obtient

$$u_n = \frac{\frac{a^n}{b^n} - 1}{\frac{a^n}{b^n} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1},$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$. En effet, comme $0 \leq \frac{a}{b} < 1$, on a $\left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Par conséquent,

$$u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, et on en déduit par encadrement que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{k} > 0$, donc $e^{\frac{1}{k}} \geq 1$. Par conséquent,

$$u_n \geq \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Par comparaison, on a alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\sin x < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et résoudre l'équation $\sin x = x$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

1. On introduit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) = 1 - \cos x$. On en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $f(x) \geq f(0) = 0$, ce qui se réécrit $\sin x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Montrons par récurrence sur n que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

– *Initialisation.* On a $u_0 = 1 \in [0, 1]$, d'où la propriété est vraie pour $n = 0$.

– *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$, et on va montrer qu'alors $u_{n+1} \in [0, 1]$.

– Comme $u_n \in [0, 1]$, on a $\frac{u_n}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin \frac{u_n}{2} \geq 0$, et $u_{n+1} \geq 0$.

– Comme $u_n \geq 0$, la question 1. donne que $u_{n+1} = 2 \sin \frac{u_n}{2} \leq 2 \frac{u_n}{2} = u_n \leq 1$.

On a donc montré par récurrence que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme on l'a vu dans la question précédente, on a $u_{n+1} \leq 2 \frac{u_n}{2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

4. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et, d'après la question 2., minorée par 0. On sait donc qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

On a donc : $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$,

– comme la fonction $\sin$ est continue, $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2 \sin \frac{\ell}{2}$.

L'unicité de la limite donne alors que $\ell = 2 \sin \frac{\ell}{2}$, ce qui se réécrit $\sin \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$.

D'après l'étude de la question 1., on a $\sin x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Finalement, $\sin x = x$ si et seulement si $x = 0$. Ceci entraîne que $\ell = 0$, c'est-à-dire que (u_n) converge vers 0.

Exercice 3. Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation $e^x = x + n$ et leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto e^x - x$$

On précisera le domaine de définition, le tableau de variation, les limites et on donnera l'allure du graphe.

2. Déduire de la question précédente que pour un entier $n \geq 2$, l'équation

$$e^x = x + n$$

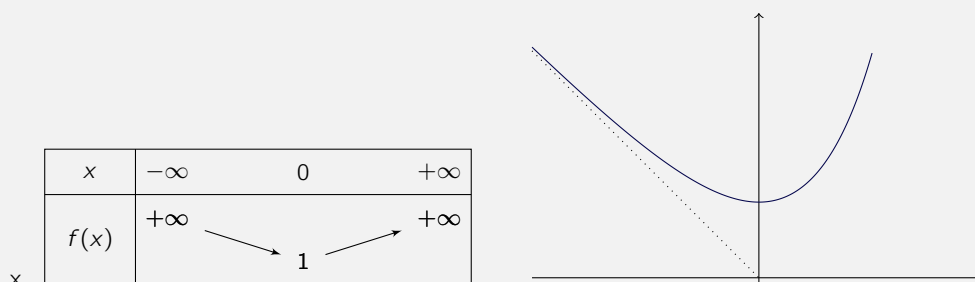
admet exactement 2 solutions, que l'on note x_n et y_n , avec $x_n < y_n$.

3. a. Comparer $f(x_{n+1})$ et $f(x_n)$, puis $f(y_{n+1})$ et $f(y_n)$, et en déduire que les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ sont monotones.
b. En déduire que $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ convergent, et déterminer leur limite.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de la fonction exp et d'une fonction polynomiale. D'autre part, comme $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ par croissance comparée,

$$e^x - x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty, \quad e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$, donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq \ln 1 = 0$. On en déduit le tableau des variations et l'allure de graphe suivants.



2. D'après la question précédente, la fonction f est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc définit une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ sur son image $]1, +\infty[$.

Comme $n \geq 2$, on a $n \in]1, +\infty[$, donc n admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}_-^*$: il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $f(x_n) = n$.

De même, comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $]1, +\infty[$. Comme $n \in]1, +\infty[$, il existe alors un unique $y_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(y_n) = n$.

Finalement, comme 0 n'est pas solution de l'équation, les deux seules solutions sont x_n et y_n , qui sont distinctes, car $x_n < 0 < y_n$. Il y a donc bien 2 solutions exactement.

3. *Monotonie.* On fixe $n \geq 2$. Par la question précédente, on a $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$, ce qui implique que $f(x_n) < f(x_{n+1})$. On a vu que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, et $x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_-^*$, ce qui entraîne que $x_{n+1} < x_n$.

De même, $f(y_n) = n$ et $f(y_{n+1}) = n+1$, ce qui implique que $f(y_n) < f(y_{n+1})$. Comme on a vu que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et $y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$, ceci entraîne que $y_n < y_{n+1}$.

Finalement, nous avons donc montré que $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, et $(y_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Limites. Supposons que $(x_n)_n$ soit minorée. Alors, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On en déduit donc par continuité de f que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell)$.

Ceci est une contradiction car $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, la suite décroissante $(x_n)_n$ n'est pas minorée, et le théorème de la limite monotone entraîne que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

De manière analogue, on montre que la suite croissante $(y_n)_n$ est non majorée, donc tend vers $+\infty$.