

DM 8

à rendre pour le 10.12.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite si possible) des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$.

4. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leq a < b$.

2. $u_n = \frac{n^2 - n + 4}{-n^2 - 2n - 1}$.

5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

3. $u_n = \frac{\ln^2(n) - 2}{\ln(n) + n}$.

6. $u_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \sin\left(\frac{u_n}{2}\right). \end{cases}$$

- Montrer que $\sin x < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et résoudre l'équation $\sin x = x$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. Le but de l'exercice est d'étudier les solutions de l'équation $e^x = x + n$ et leur comportement lorsque n tend vers $+\infty$.

- Réaliser une étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto e^x - x$$

On précisera le domaine de définition, le tableau de variation, les limites et on donnera l'allure du graphe.

- Déduire de la question précédente que pour un entier $n \geq 2$, l'équation

$$e^x = x + n$$

admet exactement 2 solutions, que l'on note x_n et y_n , avec $x_n < y_n$.

- Comparer $f(x_{n+1})$ et $f(x_n)$, puis $f(y_{n+1})$ et $f(y_n)$, et en déduire que les suites $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ sont monotones.
 - En déduire que $(x_n)_{n \geq 2}$ et $(y_n)_{n \geq 2}$ convergent, et déterminer leur limite.