

DM 9

Exercice 1. Résoudre le système linéaire $(\mathcal{S})$ suivant :

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ -4y - 8z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \end{cases} & \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 + 5L_2 \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + 5z = 0 \\ \boxed{y} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -2z \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{(-3z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(-3, -2, 1), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse si elles le sont.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

– Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système linéaire (S_1) donné par $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + 3z = b \\ 5x + 3y - z = a \\ 3x - y + 5z = c \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + 3z = b \\ 28y + 14z = a + 5b \\ 14y + 14z = c + 3b \end{cases} \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1) \end{matrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + 3z = b \\ 28y + 14z = a + 5b \\ 14z = -a + b + 2c \end{cases} \begin{matrix} (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2) \end{matrix} \end{aligned}$$

On obtient alors $x = \frac{1}{14}(2a - b + c)$, $y = \frac{1}{14}(a + 2b - c)$ et $z = \frac{1}{14}(-a + b + 2c)$.

Il y a une unique solution, donc la matrice A_1 est inversible. On a par ailleurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2a - b + c \\ a + 2b - c \\ -a + b + 2c \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ donc } A_1^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

– On sait que

$$A_2 \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $A_2 \notin \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

On aurait aussi pu remarquer tout de suite qu'il y a une relation de liaison entre les lignes de A_2 , notées L_1, L_2, L_3 : on a $6L_1 - 4L_2 = 2L_3$, soit $3L_1 - 2L_2 = L_3$, donc $A_2 \notin \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On considère a et b des réels et le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ x + ay + abz &= a \\ bx + a^2y + a^2bz &= a^2b \end{cases} \quad (S)$$

Déterminer une condition sur a et b pour que le système aient une unique solution, et la préciser.

À l'aide du pivot de Gauss, on obtient

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ a(b-a)z &= a-1 \\ a(a-b)y &= b(a^2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ a(a-b)y &= b(a^2-1) \\ a(b-a)z &= a-1 \end{cases}$$

La matrice de ce dernier système est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & a(b-a) \end{pmatrix}$, qui est inversible ssi $a(a-b) \neq 0$.

On en déduit donc que le système (S) admet une unique solution ssi $a \neq 0$ et $a \neq b$.

- Si $a \neq 0$ et $a \neq b$, alors l'unique solution est donnée par $\left(\frac{a^2(1-b)}{a-b}, \frac{b(a^2-1)}{a(a-b)}, \frac{a-1}{a(b-a)}\right)$.
- Si $a = 0$, la dernière équation du système triangulaire ci-dessus s'écrit $0 = -1$, il n'y a donc pas de solution.
- Si $a = b$, alors le système se réécrit

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= 1 \\ 0 &= a(a^2-1) \\ 0 &= a-1 \end{cases}$$

Ainsi, – si $a \neq 1$, il n'y a pas de solution,

– si $a = 1$, $(S) \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow \boxed{z} = 1 - x - y$, donc l'ensemble des solutions est $\{(x, y, 1 - x - y), x, y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. *Facultatif.* Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que la matrice A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0_n$.

Supposons qu'il existe une matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nulle telle que $AX = 0_n$, ce qui se réécrit :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \sum_{j \neq 1} a_{1,j}x_j = 0 \\ \vdots \\ a_{n,n}x_n + \sum_{j \neq n} a_{n,j}x_j = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,i}x_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j = 0$. Or, par inégalité triangulaire renversée,

$$\left| a_{i,i}x_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \geq |a_{i,i}x_i| - \left| \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right|.$$

On a par ailleurs $\left| \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}x_j|$ par inégalité triangulaire, donc

$$\underbrace{\left| a_{i,i}x_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right|}_{=0} \geq |a_{i,i}||x_i| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|.$$

Ceci est vrai pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. C'est en particulier vrai pour l'entier i tel que $|x_i| = \max\{|x_j|, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Pour cet entier, on a $|x_j| \leq |x_i|$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $-|x_j| \geq -|x_i|$. Finalement, on a

$$0 \geq |a_{i,i}||x_i| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \geq |a_{i,i}||x_i| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_i| = \left(|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) |x_i|.$$

Comme X est non nulle, $|x_i| \neq 0$, donc on a montré que $|a_{i,i}| - \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \leq 0$, qui est une contradiction.

Finalement, nous avons montré que le système linéaire $AX = 0_n$ admet une unique solution, qui est 0_n . Comme admis (pour le moment) dans le cours, ceci entraîne que A est inversible.