DM 9

à rendre pour le 17.12.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse si elles le sont.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère a et b des réels et le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z & = & 1 \\ x + ay + abz & = & a \\ bx + a^2 y + a^2 bz & = & a^2 b \end{cases} \qquad (S)$$

Déterminer une condition sur a et b pour que le système aient une unique solution, et la préciser.

Exercice 4. *Facultatif.* Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que la matrice A est inversible.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant une matrice colonne X non nulle telle que $AX = 0_n$.
