DM 10

Exercice 1. On dispose de deux urnes :
– l'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires,
– l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes.

- On choisit une urne au hasard.
- On tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
  - ◇ Si la boule tirée était blanche le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
  - ◇ Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n l'événement "la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche", et on note $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

1. On note T_1 l'événement : "le premier tirage se fait dans l'urne U_1". En utilisant le système complet d'événements $(T_1, \overline{T}_1)$, la formule des probabilités totales donne
$$p_1 \;=\; \mathbb{P}(B_1) \;=\; \mathbb{P}_{T_1}(B_1)\,\mathbb{P}(T_1) + \mathbb{P}_{\overline{T}_1}(B_1)\,\mathbb{P}(\overline{T}_1) \;=\; \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\times\frac{1}{2} \;=\; \frac{17}{35}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant cette fois le système complet $(B_n, \overline{B}_n)$, la formule des probabilités totales donne
$$p_{n+1} \;=\; \mathbb{P}(B_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{\overline{B}_n}(B_{n+1})\,\mathbb{P}(\overline{B}_n) \;=\; \frac{2}{5}\,p_n + \frac{4}{7}(1-p_n) \;=\; -\frac{6}{35}\,p_n + \frac{4}{7}.$$
3. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc arithmético-géométrique. On cherche ℓ tel que $\ell = -\frac{6}{35}\ell + \frac{4}{7}$, on obtient alors $\ell = \frac{20}{41}$.
On sait que la suite $(p_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$p_n - \ell \;=\; (p_1 - \ell)\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}, \quad \text{soit} \quad p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

Exercice 2.

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{|1+x|}-1}{\sqrt{|x|}} \end{array}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-x^2)\,\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$ est prolongeable par continuité en -1 et 1.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne

s'annule pas. Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{|1+x|}-1\right)\left(\sqrt{|1+x|}+1\right)}{\sqrt{|x|}\left(\sqrt{|1+x|}+1\right)} = \frac{|1+x|-1}{\sqrt{|x|}\left(\sqrt{|1+x|}+1\right)}.$$

Si $x > -1$, on a $|1+x| = 1+x$, donc $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|x|}(\sqrt{|1+x|}+1)}$. On a par ailleurs

$$\left|\frac{x}{\sqrt{|x|}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\sqrt{|x|}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{et finalement} \quad f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 par 0, donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est continue sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions continues sur $]-1,1[$. Par ailleurs, si $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x^2)\big(\ln(1+x)-\ln(1-x)\big) \\ &= (1-x)(1+x)\ln(1+x) - (1+x)(1-x)\ln(1-x) \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{u\to 0^+} u\ln u = 0$, on a $\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)\ln(1+x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = 0$. Ceci donne

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en -1 et en 1 par 0. La fonction se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1]$.

N.B. On pouvait aussi remarquer que la fonction f est impaire, et se contenter de faire l'étude de f au point 1.

Exercice 3. *Constante d'Euler.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Étudier la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$$

En déduire que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad \text{et} \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

   a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

   b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, et en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.

   c. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel noté γ, et justifier que $\gamma \in [1-\ln 2, 1]$.

   d. Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

3. *a.* Compléter la fonction Python `H` suivante, qui prend en argument un entier `n` et renvoie la valeur H_n correspondante. Que renvoient les fonctions `U` et `V` ?

```
import numpy as np
def H(n):
    S=...
```

```
    for k .....
        S=.....
    return(S)
def U(n):
    return(H(n)-np.log(n))
def V(n):
    return(H(n)-np.log(n+1))
```

b. Que renvoie la fonction `F` suivante ? Justifier la réponse.

```
def F(eps):
    n=1
    while(U(n)-V(n)>eps):
        n+=1
    return(U(n),n)
```

1. La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]-1,+\infty[$,
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$
Par conséquent, la fonction f a le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que la fonction f est positive sur $]-1,+\infty[$, ce qui donne bien que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. *a.* Soit $n \geqslant 2$. On a
$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= H_n - \ln(n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$
D'après la question 1, on a $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

   b. Pour $n \geqslant 2$, on a
$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= H_n - \ln(n+1) - (H_{n-1} - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$
D'après la question 1, on a $\frac{1}{n} - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Ainsi, $(v_n)_n$ est croissante.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$u_n - v_n = H_n - \ln n - (H_n - \ln(n+1)) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, (u_n) décroît, (v_n) croît et $\lim_n u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On sait alors qu'elles convergent vers une limite commune γ.

Par ailleurs, on a aussi $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $v_1 = 1 - \ln 2$ et $u_1 = 1$, on obtient donc en prenant $n = 1$ que $1 - \ln 2 \leqslant \gamma \leqslant 1$, soit $\gamma \in [1 - \ln 2, 1]$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = H_n - \ln n \geqslant \gamma$, donc

$$u_n \geqslant \ln n + \gamma.$$

Comme $\ln n + \gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient par comparaison que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. *a.*

```python
def H(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S+=1/(k+1)
    return(S)
```

Les fonctions `U` et `V` prennent en argument un entier n et renvoient respectivement u_n et v_n.

b. La fonction `F` prend en entrée un réel ϵ, et renvoie la valeur de u_n pour un entier n tel que $u_n - v_n < \epsilon$. La fonction renvoie donc une approximation de la limite γ avec une précision ϵ. En effet, lorsque $u_n - v_n < \epsilon$, on a

$$0 \leqslant \gamma - u_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \epsilon.$$

Ceci donne bien que $|\gamma - u_n| < \epsilon$.