DM 10

à rendre pour le 07.01.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. On dispose de deux urnes :
 – l'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires,
 – l'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes.

- On choisit une urne au hasard.
- On tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
 - ◊ Si la boule tirée était blanche le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
 - ◊ Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage est blanche", et on note $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

Exercice 2.

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{\sqrt{|1+x|} - 1}{\sqrt{|x|}}$$
2. Montrer que $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est prolongeable par continuité en -1 et 1 .

$$x \mapsto (1-x^2) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 3. *Constante d'Euler.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Étudier la fonction

$$f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x - \ln(1+x)$$

En déduire que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = H_n - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

- a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- b. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, et en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- c. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel noté γ , et justifier que $\gamma \in [1 - \ln 2, 1]$.
- d. Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
3. a. Compléter la fonction Python H suivante, qui prend en argument un entier n et renvoie la valeur H_n correspondante. Que renvoient les fonctions U et V ?

```
import numpy as np
def H(n):
    S=...
    for k .....
        S=.....
    return(S)
def U(n):
    return(H(n)-np.log(n))
def V(n):
    return(H(n)-np.log(n+1))
```

- b. Que renvoie la fonction F suivante ? Justifier la réponse.

```
def F(eps):
    n=1
    while(U(n)-V(n)>eps):
        n+=1
    return(U(n),n)
```