DM 11

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x \ln\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Étudier les éventuels prolongements par continuité de f aux bornes finies de $\mathscr{D}_f$.

1. Une étude du signe de $\frac{1-x^2}{x}$ montre (par un tableau de signe) que $\frac{1-x^2}{x} > 0$ ssi $x \in \mathscr{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$. Par conséquent, $\mathscr{D}_f$ est le domaine de définition de f.
2. – On a $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1-x^2}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-x^2}{x} = 0^+$, donc

$$f(x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -\infty,$$

et f n'est pas prolongeable par continuité en -1 ni en 1.

– Si $x \in]0, 1[$, on a

$$f(x) = x \ln(1-x^2) - x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{car} \quad x \ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Par conséquent, f est prolongeable par continuité par 0 en 0.

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes x_1, x_2, x_3 dans $\mathbb{R}$, et donner un encadrement de x_1, x_2 et x_3 entre deux entiers consécutifs.

On remarque que $f(-4) - 9$, $f(-3) = 5$, $f(-1) = 3$, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Par conséquent, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles suivants.

– Comme $f(-4)$ et $f(-3)$ sont de signe strictement opposés, le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-4, -3]$ donne l'existence de $x_1 \in]-4, -3[$ tel que $f(x_1) = 0$.

– Comme $f(-1)$ et $f(0)$ sont de signe strictement opposés, le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[-1, 0]$ donne l'existence de $x_2 \in]-1, 0[$ tel que $f(x_2) = 0$.

– Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont de signe strictement opposés, le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0, 1]$ donne l'existence de $x_1 \in]0, 1[$ tel que $f(x_3) = 0$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.

2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et la limite de cette suite.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}x^2 - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = -\frac{(1+2x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}.$$
Ainsi, on a $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Par conséquent, le théorème de la bijection entraîne que f est bijective de $\mathbb{R}_+^\star$ sur son ensemble image. Par ailleurs, on a
$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{et} \quad \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On en déduit que l'ensemble image de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ est $\mathbb{R}_+^\star$.
Ainsi, tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ a un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_+^\star$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $f(x_{n+1}) = n+1$ et $f(x_n) = n$, donc
$$\text{comme } f(x_{n+1}) > f(x_n), \quad \text{on a } \ x_{n+1} < x_n,$$
par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante. Elle est aussi minorée par 0, donc elle converge, vers un réel $\ell \in \mathbb{R}_+$.
Supposons que $\ell \neq 0$. On a alors par continuité de f en ℓ :
$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$
Comme $f(x_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ceci est une contradiction. On a donc montré que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0.

Exercice 4. *Facultatif.* On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n réels distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$, tous éléments de $[0,1]$.
On considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par
$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x - a_k|$$
Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe au moins un réel u dans $[0,1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ comme somme de telles fonctions. On a par ailleurs
$$f_n(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|-a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k, \quad \text{et} \quad f_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|1-a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k),$$
car pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $a_k \geqslant 0$ et $1 - a_k \geqslant 0$. Par conséquent,
$$f_n(0) + f_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k + (1-a_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$
On remarque que si $f_n(0) < \frac{1}{2}$ et $f_n(1) < \frac{1}{2}$, alors $f_n(0) + f_n(1) < 1$, ce qui n'est pas possible. On en déduit donc que soit $f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$, soit $f_n(1) \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi,

– soit $f_n(0) \geqslant \frac{1}{2}$, et dans ce cas $f_n(1) = 1 - f_n(0) \leqslant \frac{1}{2}$,
– soit $f_n(1) \geqslant \frac{1}{2}$, et dans ce cas $f_n(0) = 1 - f_n(1) \leqslant \frac{1}{2}$.

Dans les deux cas, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f_n sur l'intervalle $[0,1]$ entraîne l'existence de $x \in [0,1]$ tel que $f_n(x) = \frac{1}{2}$.