DM 11

à rendre pour le 14.01.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x \ln \left(\frac{1-x^2}{x} \right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de $\mathcal{D}_f$ de f .
 2. Étudier les éventuels prolongements par continuité de f aux bornes finies de $\mathcal{D}_f$.
-

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes x_1, x_2, x_3 dans $\mathbb{R}$, et donner un encadrement de x_1, x_2 et x_3 entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
 2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la limite de cette suite.
-

Exercice 4. *Facultatif.* On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n réels distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$, tous éléments de $[0, 1]$.On considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x - a_k|$$

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe au moins un réel u dans $[0, 1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.