

DM 12

Exercice 1. On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne face avec la probabilité p . On note X le nombre de fois où on obtient face, et on introduit la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{X+1}.$$

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Donner l'expression de l'espérance de Z .
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$. On pourra avoir recours à la formule du capitaine.

1. On reconnaît que X suit la loi binomiale de paramètres n et p .
2. D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

3. La formule du capitaine donne $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$, donc $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

En faisant le changement d'indice $l = k+1$, on obtient

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} p^{l-1} (1-p)^{n-l+1} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} p^l (1-p)^{n+1-l}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} p^l (1-p)^{n+1-l} &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} p^l (1-p)^{n+1-l} - (1-p)^{n+1} \\ &= (p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \\ &= 1 - (1-p)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \mathbb{E}(Z) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

Exercice 2. Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : à chaque étape, on tire une boule,

- si la boule est noire, on la remet dans l'urne,
- si la boule est blanche, on remet une boule noire dans l'urne à la place de la boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.

1. Déterminer la loi de Y_1 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(Y_n = 2)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

a. Montrer que $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En utilisant la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y_n = 0)$.

5. Calculer l'espérance de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Y_1 est la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne après 1 tirage. Elle prend la valeur 2 si on a tiré une boule noire au premier tirage, et 1 si on a tiré une boule blanche au premier tirage. Ainsi, $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$.

Pour tout entier i , on note N_i : "le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire". On a :

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(\overline{N_1}) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{3}.$$

2. L'événement $[Y_n = 2]$ est réalisé lorsque les n tirages ont donné une boule noire, c'est-à-dire

$$[Y_n = 2] = N_1 \cap \dots \cap N_n.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = 2) &= \mathbb{P}(N_1) \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

3. a. On remarque que le nombre de boules blanches ne peut que diminuer et $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. La famille $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ forme donc un système complet d'événements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) \mathbb{P}(Y_n = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) \mathbb{P}(Y_n = 2). \end{aligned}$$

- ◇ $\mathbb{P}_{(Y_n=0)}(Y_{n+1} = 1) = 0$ puisqu'on ne remet jamais de boule blanche dans l'urne.
- ◇ $\mathbb{P}_{(Y_n=1)}(Y_{n+1} = 1)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant 2 boules noires et une boule blanche, donc $\mathbb{P}_{(Y_n=1)}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.
- ◇ $\mathbb{P}_{(Y_n=2)}(Y_{n+1} = 1)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules blanches, donc $\mathbb{P}_{(Y_n=2)}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.

Finalement,

$$u_{n+1} = u_n \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3^n} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \left(u_n + \frac{2}{3^n} \right).$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme

$$v_1 = u_1 + \frac{2}{3} = \mathbb{P}(Y_1 = 1) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{4}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et finalement,

$$u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}.$$

4. La famille $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ forme un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = 0) &= 1 - \mathbb{P}(Y_n = 1) - \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ &= 1 - \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} - \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{2^{n+1} - 1}{3^n}.\end{aligned}$$

On retrouve bien $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1 - \frac{3}{3} = 0$.

5. On a

$$\begin{aligned}E(Y_n) &= 0 \times \mathbb{P}(Y_n = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y_n = 1) + 2 \times \mathbb{P}(Y_n = 2) \\ &= \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Remarques sur la lecture et l'exploitation de l'énoncé en vue de traiter la plus grande partie possible de cet exercice :

- Ne pas hésiter à faire un arbre pour voir l'évolution du nombre de boules blanches, et obtenir ainsi $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Ce faisant, on obtient que l'événement $[Y_n = 2]$ se réalise lorsque les n tirages ont donné une boule noire, et on peut traiter la question 2.
- La relation de 3.a. à obtenir est écrite dans l'énoncé : on peut l'admettre et traiter la 3.b, question classique d'étude de suite.
- Avec la valeur de $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$, on est alors en mesure de traiter les questions 4 et 5.