DM 12

à rendre pour le 21.01.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne face avec la probabilité p. On note X le nombre de fois où on obtient face, et on introduit la variable aléatoire

$$Z = \frac{1}{X+1}.$$

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Donner l'expression de l'espérance de Z.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$. *On pourra avoir recours à la formule du capitaine.*

Exercice 2. Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : à chaque étape, on tire une boule,

- si la boule est noire, on la remet dans l'urne,
- si la boule est blanche, on remet une boule noire dans l'urne à la place de la boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $\mathbb{P}(Y_n = 2)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
   a. Montrer que $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   b. En utilisant la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
   $$u_n = \frac{2^{n+1}-2}{3^n}.$$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\mathbb{P}(Y_n = 0)$.
5. Calculer l'espérance de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
