DM 13

Exercice 1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et deux réels a et b. On considère la fonction

$$f_n \ : \ x \ \mapsto \ x^{2n} + ax + b$$

1. Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'équation $f_n'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet au plus deux solutions sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et sa dérivée est donnée par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = 2nx^{2n-1} + a$$

   La fonction f_n' est dérivable, et de dérivée donnée par $f_n''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} = 2n(2n-1)(x^{n-1})^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, donc $f_n''(x) > 0$. On en déduit que f_n' est strictement croissante.

   Comme f_n' est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection assure qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R})$.

   Comme $f_n'(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f_n'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ansi, l'équation $f_n'(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. On raisonne par l'absurde. Supposons que $f_n(x) = 0$ a trois solutions distinctes x_1, x_2, x_3. Ainsi, comme on a $f_n(x_1) = f_n(x_2) = 0$ et f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $y \in]x_1, x_2[$ tel que $f_n'(y) = 0$. De même, comme $f_n(x_2) = f_n(x_3) = 0$, il existe $z \in]x_2, x_3[$ tel que $f_n'(z) = 0$.

   On a ainsi obtenu deux solutions distinctes y et z à l'équation $f_n'(x) = 0$, et il y a contradiction avec le résultat de la question précédente. On a donc bien montré par l'absurde qu'il y a au plus deux solutions à l'équation $f_n(x) = 0$.

Exercice 2. Montrer que pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}_-$,

$$|e^x - e^y| \leqslant |x - y|.$$

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, on a $|f'(t)| \leqslant 1$, car

$$|f'(t)| = e^t \leqslant e^0 = 1,$$

par croissance de la fonction $t \mapsto e^t$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_-$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 1\,|x - y|, \quad \text{soit} \quad |e^x - e^y| \leqslant |x - y|.$$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $x^2 - 1$ est $x + 1$.

1. Déterminer le reste de la division de P par $x + 1$.
2. Déterminer le reste de la division de P par $x - 1$.

1. D'après l'énoncé, on a $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + x + 1$, où $Q \in \mathbb{R}[x]$. Ainsi,
$$P(x) \;=\; (x+1)(x-1)Q(x) + x + 1 \;=\; (x+1)\big((x-1)Q(x)+1\big),$$
donc $x+1$ divise P, et le reste dans la division de P par $x+1$ est nul.
2. On a $P(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + x - 1 + 2 = (x-1)\big((x+1)Q(x)+1\big) + 2$. Cette dernière écriture est bien la division euclidienne de P par $x-1$ car $\deg(2) < \deg(x-1)$. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de P par $x-1$ est 2.

Exercice 4. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme P, et en déduire la factorisation du polynôme
$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

On remarque qu'on a bien $P(1) = 0$. Par ailleurs, on a $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$, donc $P'(1) = 0$, puis $P''(x) = 12x^2 - 6x - 6$, donc $P''(1) = 0$. Enfin, $P^{(3)}(x) = 24x - 6$, donc $P^3(1) \neq 0$. On en déduit que 1 est racine de multiplicité 3, et ainsi que $(x-1)^3$ divise P.
Pour obtenir la factorisation, on effectue la division euclidienne de P par $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

$$\begin{array}{rrrrr|c}
x^4 & -x^3 & -3x^2 & +5x & -2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \cline{6-6}
 & 2x^3 & -6x^2 & +6x & -2 & x+2 \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, la factorisation de P est $P(x) = (x-1)^3(x+2)$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + P(x+1) = 0. \tag{E}$$
On raisonne par analyse synthèse.

1. *Analyse.* Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant (E).
   a. Montrer que pour tout réel x, $P(x) = P(x+2)$.
   b. En déduire que P' est le polynôme nul, puis que P est le polynôme nul.
2. *Synthèse.* Conclure.

1. *a.* Si $x \in \mathbb{R}$, alors $P(x) = -P(x+1) = -(-P(x+2)) = P(x+2)$.
   b. On déduit de la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(k) = P(k+2)$. Comme P est dérivable sur l'intervalle $[k, k+2]$, le théorème de Rolle implique alors l'existence de $x_k \in]k, k+2[$ tel que $P'(x_k) = 0$.
   Les réels x_k sont deux à deux distincts, car ils appartiennent à des intervalles disjoints. On a donc trouvé une infinité de racines au polynôme P' qui est donc nul.
   On en déduit alors que P est un polynôme constant : il existe un réel α tel que $P(x) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme on a $P(0) = -P(1)$, on a aussi $\alpha = -\alpha$, ce qui donne $\alpha = 0$. Ainsi, P est le polynôme nul.
2. Si P est le polynôme nul, alors il est clair qu'il vérifie (E). Nous avons montré dans la question précédente qu'il n'y avait pas d'autre polynôme vérifiant (E). Par conséquent, le seul polynôme qui convient est le polynôme nul.
