DM 13

à rendre pour le 04.02.

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

Exercice 1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et deux réels a et b. On considère la fonction

$$f_n \ : \quad x \quad \mapsto \quad x^{2n} + ax + b$$

1. Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'équation $f_n'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet au plus deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}_-$,

$$|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \ \leqslant \ |x - y|.$$

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $x^2 - 1$ est $x + 1$.

1. Déterminer le reste de la division de P par $x + 1$.
2. Déterminer le reste de la division de P par $x - 1$.

Exercice 4. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme P, et en déduire la factorisation du polynôme

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

Exercice 5. *Facultatif.* Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + P(x+1) = 0. \tag{E}$$

On raisonne par analyse synthèse.

1. *Analyse.* Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant (E).
   a. Montrer que pour tout réel x, $P(x) = P(x+2)$.
   b. En déduire que P' est le polynôme nul, puis que P est le polynôme nul.
2. *Synthèse.* Conclure.
