DM 14

à rendre pour le 25.02.

Exercice 1. On considère l'ensemble

$$F = \{P \in \mathbb{R}[x],\ (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0\}.$$

1. *Question indépendante.* Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit P un polynôme de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0. \qquad (E)$$

   Exprimer P' et P'', et en déduire des relations entre les réels a, b, c.
   En déduire finalement l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_2[x]$ qui vérifient (E).
3. On suppose maintenant que P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^\star$ qui appartient à F, c'est-à-dire que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ avec } a_n \neq 0, \quad \text{et} \quad (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0.$$

   a. Montrer que le coefficient de $(x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x)$ associé à x^n est $(n^2 - n - 2)a_n$.
   b. En déduire la seule valeur possible pour le degré n de P.
4. En déduire l'expression de tous les polynômes appartenant à F, puis une famille génératrice de F.

Exercice 2. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée.

On va s'intéresser aux successions de lancers amenant un même résultat, qu'on appellera *séries*. On va considérer le nombre de séries lors des n premiers lancers, comme précisé ci-dessous.

- On dit que la première série est de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté. Elle est de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce.
- La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série si elle s'achève avant le lancer $n-1$, et ainsi de suite. La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ème}}$ lancer.

On suppose que l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au nombre de séries lors des n premiers lancers.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFFPPP... (où F désigne Face et P Pile), on a :

$$Y_1 = Y_2 = 1, \quad Y_3 = \ldots = Y_6 = 2,$$
$$Y_7 = Y_8 = 3, \quad Y_9 = \ldots = Y_{11} = 4.$$

En effet, après 1 lancer (F), il y a une seule série (Face), donc $[Y_1 = 1]$ est réalisé. Après 2 lancers (FF), il n'y a toujours qu'une série, donc $[Y_2 = 1]$ est réalisé. Après 3 lancers (FFP), il y a deux séries donc $[Y_3 = 2]$ est réalisé, etc.

Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note P_i l'événement "le i-ème lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.

1. Déterminer les lois de Y_1 (nombre de séries après 1 lancer), Y_2 (nombre de séries après 2 lancers) et Y_3 (nombre de séries après 3 lancers), et donner leurs espérances.

2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $Y_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par Y_n), puis calculer les valeurs de $\mathbb{P}(Y_n = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_n = n)$.

3. *Simulation informatique.* Pour $k \in \mathbb{N}^\star$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ème}}$ lancer amène Pile, et 0 sinon.

   Compléter la fonction `SimuleY(n)` suivante, qui prend en entrée un entier `n`, simule $X_1, \ldots, X_n$ (dont les valeurs seront stockées dans le tableau `X`), et détermine les valeurs de $Y_1, \ldots, Y_n$ (qui seront stockées dans le tableau `Y`).

   On rappelle que `rd.randint(0,2)` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def SimuleY(n):
    X=np.zeros(n); Y=np.zeros(n)
    X[0]=...
    Y[0]=...
    for i in range(1,n):
        X[i]=...
        if ...:
            Y[i]=...
        else:
            Y[i]=...
    return(Y)
```

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on introduit la fonction génératrice de Y_n : pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$G_n(t) \;=\; \sum_{k=1}^{n} t^k \,\mathbb{P}(Y_n = k)\,.$$

4. Justifier que tout $t \in [0, 1]$, on a $\mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right) = G_n(t)$.

5. Justifier que G_n est dérivable sur $[0, 1]$, et calculer sa dérivée. Que représente $G_n'(1)$?

6. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\mathbb{P}([Y_n = k] \cap P_n) \;=\; \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1})\,.$$

   On admet que l'on obtiendrait de même :

$$\mathbb{P}([Y_n = k] \cap F_n) \;=\; \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1})\,.$$

   Montrer alors que

$$\mathbb{P}(Y_n = k) \;=\; \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)\,.$$

7. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$G_n(t) \;=\; \frac{1+t}{2}\, G_{n-1}(t).$$

   Calculer $G_1(t)$ et en déduire que

$$G_n(t) \;=\; \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} t.$$

8. Déduire de ce qui précède le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers, donné par $\mathbb{E}(Y_n)$.